国家“八五”重点
图书规划项目

吴文俊主编

北京师范大学出版社

ZHONGGUO SHUXUESHI DAXI





中国数学史大系

第六卷 西夏金元明

中国数学史大系

责任编辑 张其友 刘秀兰

封面设计 李葆芬







ISBN 7-303-04927-4/O·214

定价：45.00 元

国家“八五”重点图书规划项目

中国数学史大系

吴文俊 主编

本卷主编 李迪

第六卷 西夏金元明

北京师范

图书在版编目(CIP)数据

中国数学史大系第 6 卷/吴文俊主编;李迪分主编．—北京:
北京师范大学出版社,1999.6
ISBN 7-303-04927-4

Ⅰ．中…　Ⅱ．①吴…②李…　Ⅲ．数学史-中国　Ⅳ．0112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 40300 号

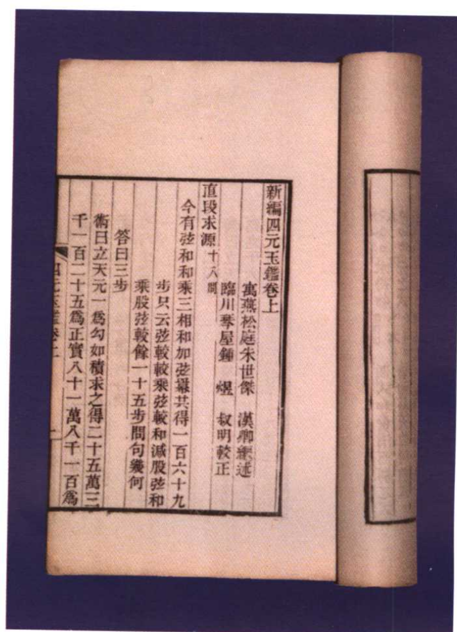
北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号　邮政编码:100875)
出版人:常汝吉
北京东晓印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本:850mm×1 168mm　1/32　印张:18.25　字数:446 千字
1999 年 6 月第 1 版　1999 年 6 月第 1 次印刷
印数:1～5 000 册
定价:45.00 元

中国数学史大系编委会

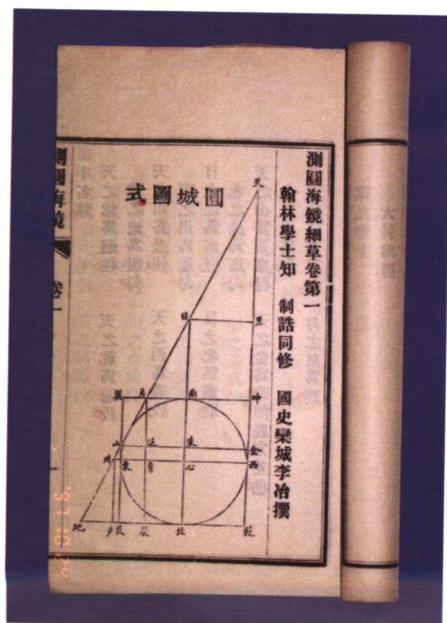


郭守敬
(1231~1316)

元·朱世杰《四元玉鉴》

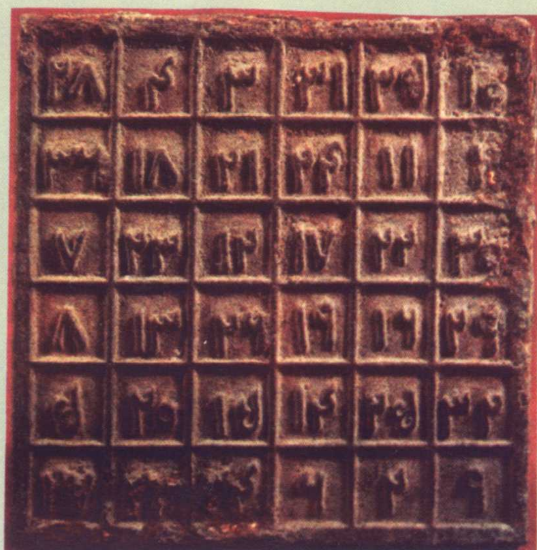


新編四元玉鑑卷上
寓燕松庭朱世傑　漢卿編述
臨川季屋鍾煋　叔明校正
直段求源十八問
今有弦和和乘三相和加弦冪共得一百六十九
步只云弦較較乘弦較和減股弦和
乘股弦較餘一十五步問句幾何
答曰三步
術曰立天元一為勾如積求之得二十五萬三
千一百二十五為正實八十一萬八千一百為

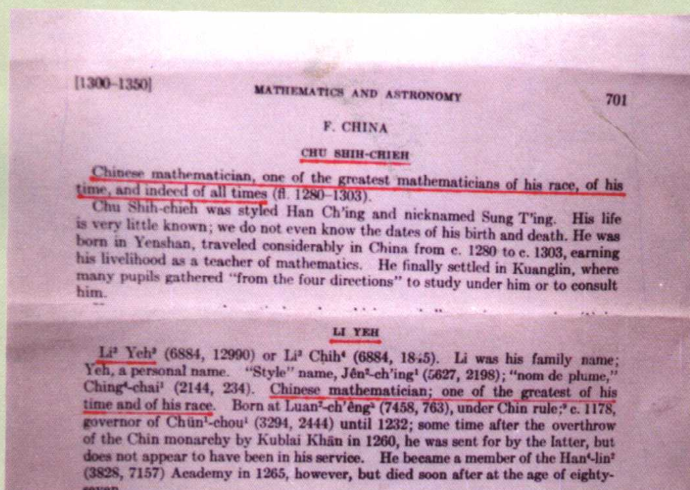


測圓海鏡細草卷第一
翰林學士知　制誥同修　國史欒城李冶撰
圓城圖式

元·李冶《测圆海镜》



陕西西安出土元代铁板·阿拉伯数码幻方



[1300–1350] MATHEMATICS AND ASTRONOMY 701

F. CHINA

CHU SHIH-CHIEH

Chinese mathematician, one of the greatest mathematicians of his race, of his time, and indeed of all times (fl. 1280–1303).

Chu Shih-chieh was styled Han Ch'ing and nicknamed Sung T'ing. His life is very little known; we do not even know the dates of his birth and death. He was born in Yenshan, traveled considerably in China from c. 1280 to c. 1303, earning his livelihood as a teacher of mathematics. He finally settled in Kuanglin, where many pupils gathered "from the four directions" to study under him or to consult him.

LI YEH

Li^{3} Yeh^{3} (6884, 12990) or Li^{3} Chih^{4} (6884, 18[illegible]5). Li was his family name; Yeh, a personal name. "Style" name, Jên^{2}-ch'ing^{1} (5627, 2198); "nom de plume," Ching^{4}-chai^{1} (2144, 234). Chinese mathematician; one of the greatest of his time and of his race. Born at Luan^{2}-ch'êng^{3} (7458, 763), under Chin rule;[9] c. 1178, governor of Chün^{1}-chou^{1} (3294, 2444) until 1232; some time after the overthrow of the Chin monarchy by Kublai Khān in 1260, he was sent for by the latter, but does not appear to have been in his service. He became a member of the Han^{4}-lin^{2} (3828, 7157) Academy in 1265, however, but died soon after at the age of eighty-seven.

萨顿对朱世杰和李冶的评价



位于安徽黄山市屯溪(明)程大位故居维新堂

（采自《程大位故居珠算资料馆》）



左起：林力娜(法)、沈康身、李迪、白尚恕、李兆华、孔国平

1992年8月2日摄于河北栾城

序

1984年间，四位中国数学史的专家教授，倡议缮写一部全面论述中国传统数学历史发展的巨大著作，取名为《中国数学史大系》，这四位教授(以年事为序)是：

北京师范大学的白尚恕教授；

杭州大学的沈康身教授；

内蒙古师范大学的李迪教授；

西北大学的李继闵教授。

中国传统数学源远流长，有其自身特有的思想体系与发展途径，从远古以至宋元，在很长一段时间内成为世界数学发展的主流，但自明代以来，由于政治社会等种种原因，特别如明末徐光启所指出的那样，一方面“名理之儒，土苴天下之实事”，另方面“妖妄之术，谬言数有神理”，致使中国传统数学濒于灭绝，以后全为西方欧几里得传统所凌替以至垄断，虽然康乾之世曾有一度重视，但仅止于发掘阐释古籍而已，循至20世纪中叶，李俨、钱宝琮先生撰写中国数学史专门著作进行介绍，使中国古算得以不绝如缕。到70年代特别是改革开放以来，全国兴起了研习中国传统数学的高潮，论著迭出，仅就对《九章算术》与注者刘徽的各种形式的专著，就在10种以上，其它方面论著之多，更难以统计，这些研究使中国传统数学的固有特色，如构造性、机械化、以及离散型的算法形式

等，与西方欧几里得传统迥然异趣，得以贻然在目，甚至国外数学史家，也表示了对中国古算的浓厚兴趣，李约瑟的中国科技史巨著固不待论，此外还酝酿了《九章算术》与刘徽注的英文与法文编译，尤其值得一提的是：《九章算术》刘徽注中关于阳马术的一段术文，过去认为有脱漏舛误而难以理解。丹麦的Wagner先生却给予了正确的解释，使中国古算中一段辉煌成就，得以大白于世。虽然如此，目前国内大部分群众对中国数学的成就和发展情况了解仍嫌不足，已有的同类书籍却偏于某一侧面，不能满足现在教学、科研或其他方面的需求。已有的工作与我国的发展形势还不太相称，国际学术界也有较强烈的要求，希望有大型的中国数学史著作问世。《大系》的倡议，可谓来自这些对客观形势的分析，有鉴于客观上有此必要而来。《大系》全书是编年史，自上古以迄清末，共分八卷，各卷自成断代史，除复原古代算法的形式，并对照以近代算法外，将尽量收入各家最新研究成果，以期能对中国古代数学的发展情况与辉煌成就作一次较彻底的清理与研究，借以达到发扬成绩，总结规律，预见未来并服务于我国四化建设的目的。

《大系》在白、沈与二李等四位倡议与领导之下，有不少中算史的专家学者参与了写作，规模之宏，在国内外还从未见过，可谓首创。不幸的是：在写作过程中，李继闵教授于1993年因病逝世，白尚恕教授也于1995年因肺癌逝世。这影响了编写进程，使《大系》的写作不得不一再延期，原来的计划也作了某些局部修改，所幸赖写作者的积

极工作，以及北师大出版社的高度热情，第一部分一、二、三卷自上古以迄以刘徽为中心的三国时代，终于问世。在《大系》全书不久即可全部出齐之际，聊志数语，以示庆贺。

吴文俊

1997.12.25

第六卷前言

本卷的时间跨度是上起西夏下迄明末，即约在1000年～1600年的600年间，所涉地域范围先是由中国北部、西北部到西南部，与偏居东南的南宋王朝对峙，数学的发展也有很大差别，可以说各有特点；后是由元统一了全中国，使南北数学汇合，结出了以朱世杰工作为代表的丰硕果实，把中国传统数学推向了顶峰。从元代后期起，在数学思想和内容方面出现了很大的转折，以后的将近300年间几乎完全是大众化、通俗化工作，珠算代替了传统的筹算，同时伴随着不同形式的笔算。

本时期的中国数学呈很大的复杂性，特别是前半期，包括西藏、西夏、金和蒙古元初，头绪较多，按照全书的整体框架考虑，以年代先后为序安排编、章，难度很大。现在定下来的安排也是经过反复考虑，照顾到历史性和逻辑性的结果，并不一定完全合理。读者将会看到，本卷主体是按年代安排的，但并不按朝代，有些是按数学发展变化本身的特点或其他因素划分的，如元代后期与明初合在一起为一章，而本卷的最末不是直到明亡，而是"留"下差不多半个世纪。原因是后来西方初等数学不断传入中国，与中国传统数学融合，形成了有西方数学内容的传统数学，因而另立卷次。

本卷在内容的选择上，一方面是有重点的，如李冶、朱世杰为重中之重，其次如王恂、吴敬、王文素和程大位等为第二类重点，从字数来看，王文素较多，与以往的同类著作不同；另一方面也把那些零星资料安排进来，尽管这些资料不太重要，但不应完全弃之不理，否则全书便成为一些孤立点，点与点间出现大段

大段的时间空白，如果这样处理，则结果既是内容不连贯的数学史，也是对古人的不公正。但都安排进来的结果也使书的内容有些杂乱。又因为强调时间顺序，有的同类问题被分成两段，中外交流便是个例子，第三编用了一章的篇幅，第六编又有大半节。如果合在一起也不太好安排，放在何处都不合适，总要有个位置，便分开处理了。此外，还有些其他问题，在章、节的安排上很费周折，如珠算起源问题不能不讲，由于我们是写书，不能详细论述，只能做为一小节，放在第六编开头最合适，可是它构不成一章，若是放入王文素部分的开头，位置合适，而该部分已经很大，且又有些不谐调，几经琢磨，做为珠算史的小结，放在了第六编第三章的末尾。总之，不好处理的问题很多，最后总要定下来，就是目前这个样子，不见得都妥当。

按原来的计划，本卷应在1997年末完成，但由于执笔人的变动，推迟到现在，也给出版社的出版计划造成一定的困难。

第三编和第四编是国家自然科学基金项目（19465001）的成果与扩充。

本卷分工及执笔人如下：

孔国平：第二编，第五编第二章第一至第三节。

纪志刚：第五编第一章。

劳汉生：第五编第三章，第六编第一章。

韩祥临：第六编第二章。

刘凤荣：西夏金元明研究分类文献目录和人名索引。

李　迪：第一、三、四编，第五编第二章第四节，第六编第三、四章。并负责制订全书的框架和全书的组织编写及统稿工作。

本卷在写作和统稿过程中，利用了内蒙古师范大学图书馆和该校科学史研究所资料室的藏书，也参考了他人的大量成果，田淼博士等给予了帮助，出版社在各方面给予支持与有效的合作，使本卷顺利脱稿，…在此一并致以谢意。

由于本人在学术和资料等方面的限制，书中可能存在各种问题和错误，恳请读者赐教。

李迪

于内蒙古师范大学寓所

1998年3月15日

目　　录

第六卷前言……………………………………………………（1）

第一编　西藏西夏金与北方民间数学……………………（1）

第一章　藏、党项羌、女真等族的数学……………（1）

第一节　藏族的数学………………………………（1）

第二节　西夏党项羌族的数学……………………（7）

第三节　女真族的数学……………………………（13）

第二章　金历法中的数学……………………………（18）

第一节　金对历法的研究及相关问题……………（18）

第二节　《知微历》及其求交食食限辰刻的几何方法…（24）

第三节　《知微历》对差分的应用………………（29）

第三章　北方的民间数学研究………………………（35）

第一节　天元术的形成和发展……………………（35）

第二节　以刘秉忠为代表的一个河北知识群体……（44）

第二编　李冶的数学成就…………………………………（50）

第一章　李冶生平及学术思想………………………（50）

第一节　李冶生平…………………………………（50）

第二节　李冶的学术思想…………………………（57）

第二章　《测圆海镜》………………………………（63）

第一节　《测圆海镜》内容分析…………………（63）

第二节　《测圆海镜》的学术价值………………（83）

第三节　《测圆海镜》的版本及流传……………（97）

第三章　《益古演段》………………………………（104）

第一节 《益古演段》内容分析……………………（104）
第二节 条段法与天元术 ……………………（111）
第三节 数学理论的创新 ……………………（119）
第四节 《益古演段》评述 ……………………（127）
第三编 蒙古与元初的官方历算学……………………（131）
第一章 蒙古与元初的中外历算交流……………………（131）
第一节 成吉思汗西征与耶律楚材历算学 ……………………（131）
第二节 西方与中亚历算学的东来……………………（135）
第三节 回回历算书的传入 ……………………（142）
第四节 阿拉伯数码幻方的传入……………………（146）
第五节 马拉加天文台的中国学者……………………（150）
第二章 元初的历法改革……………………（152）
第一节 改革的动因与工作人员……………………（152）
第二节 改历前的研究工作 ……………………（156）
第三节 新历法的结构与改革内容……………………（166）
第三章 王恂的数学成就……………………（169）
第一节 《授时历》中对招差术的应用 ……………………（169）
第二节 《授时历》中对几何的应用 ……………………（176）
第三节 解高次方程 ……………………（186）
第四章 官方数学教育与对官吏的数学要求……………………（194）
第一节 元代的官方数学教育 ……………………（194）
第二节 对官吏的数学要求 ……………………（199）
第四编 朱世杰的数学成就……………………（206）
第一章 朱世杰与《算学启蒙》……………………（206）
第一节 朱世杰及其著作 ……………………（206）
第二节 《算学启蒙》的体例与特点 ……………………（212）
第三节 《算学启蒙》的成就 ……………………（220）
第二章 四元术与高次方程……………………（230）

第一节 《四元玉鉴》综论及四元术的建立 …………（230）
第二节 四元术算题 ……………………………………（239）
第三节 高次方程问题 …………………………………（246）
第三章 垛积与招差术……………………………………（261）
第一节 垛积及其逆问题 ………………………………（261）
第二节 招差术……………………………………………（267）
第三节 垛积招差与“古法七乘方图”的关系 ………（276）
第五编 元代后期与明代前期对传统数学的整理与著述……………………………………（281）
第一章 赵友钦对圆周率的研究与沙克什水利工程中对数学的应用…………………………（281）
第一节 赵友钦对圆周率的研究…………………………（281）
第二节 《河防通议》中的数学内容 …………………（292）
第二章 元末明初的民间数学与《永乐大典》中之算书……………………………………（304）
第一节 《丁巨算法》 …………………………………（304）
第二节 《算法全能集》与《详明算法》 ……………（309）
第三节 《通源算法》、《透帘细草》及其他 …………（316）
第四节 明初之数学教育与《永乐大典》中之算书……（323）
第三章 吴敬《九章算法比类大全》……………………（330）
第一节 吴敬及其著作 …………………………………（330）
第二节 《九章算法比类大全》内容介绍 ……………（332）
第三节 对《九章算法比类大全》的评价 ……………（337）
第六编 珠算的普及与对明代数学的评价…………………（346）
第一章 王文素及其数学著作……………………………（346）
第一节 王文素事迹和《算学宝鉴》版本及内容简介…（346）
第二节 王文素的珠算乘法、归除与飞归 ……………（353）
第三节 王文素对珠算补数与倒数乘除法研究 ………（362）

第四节 王文素对其他珠算法的研究 …………………… (371)
第五节 王文素的治学思想 …………………………… (386)
第二章 程大位的数学工作…………………………… (388)
第一节 程大位的《直指算法统宗》 …………………… (388)
第二节 《算法统宗》中珠算算法的应用 …………… (428)
第三节 程大位的《算法纂要》…………………………… (454)
第四节 《算法统宗》的流传 ………………………… (467)
第三章 明代中后期的其它数学著作……………… (480)
第一节 明代中期几位数学家的工作 ………………… (480)
第二节 《指明算法》、《盘珠算法》和《一鸿算法》… (485)
第三节 《数学通轨》与《算法指南》 ……………… (493)
第四节 朱载堉与邢云路的工作……………………… (497)
第五节 珠算起源问题 ………………………………… (502)
第四章 对明代传统数学的评价与中外交流……… (506)
第一节 对明代传统数学的评价……………………… (506)
第二节 中国和伊斯兰地区的数学交流 ……………… (512)
第三节 中国和日本、朝鲜、越南的数学交流 ……… (517)
西夏金元明研究分类文献目录………………………… (526)
人名索引………………………………………………… (551)

第　一　编

西藏西夏金与北方民间数学

本编主要讲述藏族、西夏、金与山西、河北一带地方的民间数学研究活动。为了说明问题方便起见，在这里简要地介绍一下当时的社会政治情况。西夏为党项羌族在今宁夏、陕西、甘肃一带所建之政权，起于 1038 年，亡于 1227 年。金为女真族所建，先在中国东北地区，1125 年灭辽，首都迁到今北京，1127 年灭北宋，1215 年迁都开封，1234 年亡。此后，北方基本上都归蒙古统辖。西南的吐蕃诸部为藏族聚居区。

第一章　藏、党项羌、女真等族的数学

本章讲述西南的藏族、西北的党项羌族和北方的女真族的数学。这里所讲相当于中原的宋元时代，对藏族数学的介绍到明代，当时的数学到底达到多高水平，由于研究的程度和资料所限，目前尚难判明。现在只能根据已知的零星资料，做一简单介绍。

第一节　藏族的数学

藏族生活在中国的西南部，有悠久的文化历史，并有独特的文化传统。他们也不断吸收内地汉族和北部相邻其他民族的科技

文化，同时受到了印度文化的深刻影响。为了比较全面地了解藏族的数学，我们将从唐代时吐蕃时代的历算讲起。藏族很早就对天文历法有所研究，并且发明了三四种方法观测时间，还制造了简单的计算仪器。

7 世纪时，唐朝和吐蕃和亲，文成公主下嫁到吐蕃。她进藏时带去了不少汉文典籍，其中也包括一些历算著作，而且数量很大，有说“占卜历算之书六十种”，还有的记载说带去“八十部占筮历算法”等等，到底有多少种难以说清。其中留下书名的，由藏文翻译成汉文的主要有《博唐八十数理》、《五行珍宝包罗》、《密意根本之精》、《珍宝之堆》、《主千综述》以及黄历推算法等。从名称来考察，尚未找到能对应上的汉文书名，因此具体内容也难以了解。不过，可以根据译名推测，那些书应主要是占卜、历法及其有关算法。文成公主于贞观十五年（641 年）进藏，按惯例要带去当时正在行用的历法。查贞观十五年所用历法为经过王孝通等修改的《戊寅历》（傅仁均造），在几十部占卜历算书中理所当然包括这部历法。由于内地历算传入吐蕃，对当地历算的发展必然起推动作用。据记载，松赞干布曾派察达丹、朗措多勒、甲迦冬衮和达米达卡等 4 人到汉地学习历算，他们返回吐蕃后将学会的占卜历算之法全部译成藏文。从此以后，在吐蕃有许多汉人的历算广泛流传。其中主要的有：以五行计算的十二生肖纪年法、九宫、八卦、黄历推算、六十花甲、二十四节气和“牛算”等。稍后，墀德祖甸时代，又有黄历历书《暮人金算》、《达那穷瓦多》、《市算八十卷》、《珠吉地方的冬夏至图表》、《穷算六十》、《李地方的属年》等历算著作陆续传到吐蕃。

8 世纪初，金城公主是又一和亲到吐蕃的唐王朝的公主，她也带去不少历算书，把其中的《算学七续圣典》、《八支》等关于五曜、八卦、九宫、七曜和二十八宿等译成藏文。

此后，汉地的班智达达钦体里（别名叫丁作或土华那波）以

及和尚马哈亚那、马哈惹乍帝瓦、比其赞巴希拉和藏族的康巴·查吴、穷布·唐波、朗措东亚、藏玉谢、摩雷侃、加玉桑等翻译了算学的五行配法（即五行推算法）和三十六分支。其中土华那波是一重要人物，他先后两次去吐蕃，康巴·查吴和穷布·唐波都是他的弟子。后来，涌现了一批藏族历算家，用藏文写了许多历算方面的著作，数学得到很大发展，形成了自己的历算理论和算法。

9 世纪初，在吐蕃有一种叫“及孜”的推算法开始推行，定一年的时间长度为 365 日 15 小时 32 分 4/13，相当精确。

吐蕃作为西藏的一个地方王朝，于 842 年灭亡，后来历史上称为吐蕃诸部，元代时归宣政院管辖。明代设有乌思藏都司和朵甘都司。9 世纪后期，西藏的历算学仍很发达。例如前面提到的朗措东亚有一后代叫木雅·坚参白桑，住在玉波札朗的山洞（即今札朗县的“握嘎山洞”）研究历算学，参照各种著作撰写了有关天文历法方面的著作，建立了适合当地的历算推算法。坚参白桑的后裔和其他许多精通历算的学者，继续研究和推行这种算法，人称“山洞算法”①。

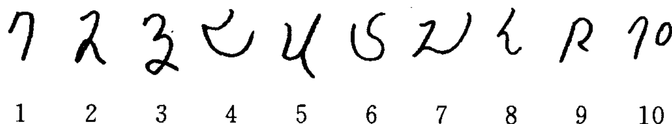
上面所讲的“历算”主要是指关于天文历法甚至占卜的计算问题，尽管我们还不太清楚用到何种数学工具，但肯定达到了较高水平，加、减、乘、除四则运算应当是非常熟练的，对分数的处理和应用也都很自如。前面几次提到的“九宫”数是藏族非常喜用的 3 阶幻方（图 1.1.1 为现代形式），在以后的著作中经常出现。从汉历的计算来看，隋唐时期大量使用差分表和插值法，藏族历算学家很可能通晓。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 1.1.1

① 催成群觉，索朗班觉．藏族天文历法史略．西藏研究，1982（2）：22～35

由于计算上的需要，藏族早在吐蕃时代就形成了自己的数码，后来逐渐推广使用。8 至 10 世纪颇为盛行。在甘肃省敦煌遗书中保存有早期的藏文数码（简称为藏码），例如在一卷吐蕃时代写经的标页处有 31～41 共 11 个数码，从而保存了从一到九和零这 10 个早期藏码[①]。据研究对照认为，和现今仍在广泛使用的藏码完全一致。现在使用的藏码如下：



有关藏码和粟特文的资料，20 世纪 80 年代以来不断有报道。例如收藏在法国巴黎国家图书馆手稿部的敦煌藏文写卷中，有一卷依照拉鲁女士（M. LaLou，1890～1967）的编号为 Pelliot tibetain Touen-houang 1256，是一篇用藏文音译汉字的材料，内容是乘法九九表，全是藏文。次序是由“九九八十一”到“一一如一”，与敦煌遗书中的汉文九九表次序相同。从字体的苍古遒劲判断，手卷的时代可能早到吐蕃时期[②]。

回鹘—粟特文数字也有发现。法国国立研究中心著名的敦煌学家阿密尔顿（James Hamilton）在《敦煌学论文集》第二卷（日内瓦—巴黎出版）上发表一篇题为《汉文数字一至三十的粟特文对音》一文。文中披露，在两卷藏文写本中，其背面是用回鹘—粟特文转写的汉文数字一至三十，其时代可能是 10 世纪的资料[③]。

---

① 这 10 个藏码，笔者曾试图看看原样，但因不易到达收藏处，未果。

② 华侃．敦煌古藏文写卷《乘法九九表》的初步研究．西北民族学院学报（哲学社会科学版），1985（3）

③ 王进玉．敦煌遗书中的数学史料及其研究．数学史研究文集，第三辑．呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1991．58～65

数码是一种数目符号，与文字不同，可以不借助文字进行运算，因此是先进的表现。用数码进行运算，还要用笔（或其他类似的工具）写出，或画在某处，从而形成笔算。完整的笔算除数码外尚应有某些符号配合，如运算符号和性质符号等，早期的笔算没有这些符号，主要是凭运算者事先的决定，是加法便把两个数写出来实施加法运算，其他运算同样如此。藏族的笔算就是这样的。到现在也不用运算符号等符号，只是写藏码。

藏码和早期印度数码很相近，两者有无关系，目前还不清楚。

藏族进行演算时常用一种沙盘（藏名为“沙雄”）（如图1.1.2），它分为两部分：一部分是在一端装些细面沙，有一个横格隔着成为小匣，格的下方中间有一半圆小孔，平时把小孔塞住；另一部分是带边框的平板，演算时把小孔打开，使细面沙流到平板上，摊平，用一细金属丝或竹木棍（一端有尖）在盘上写藏码进行演算。沙盘的发明年代虽然还不清楚，但在宋元时代肯定已经存在了。在明代传到了北方蒙古族地区，连同藏码等都被蒙古族等所采用。

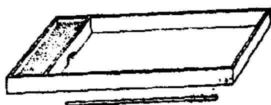


图 1.1.2　沙盘

11 世纪初，苫婆罗国（有可能是尼泊尔）的《时轮经》传入西藏。《时轮经》据传是佛教创始人释迦牟尼晚年传法的记录。分为五品，第一品讲外时轮，即天体运动的规律；第二品讲内时轮，即人体内脉息运行的规律；第三品到第五品讲内时轮和外时轮的结合。这是佛教上的修证方法①。后来在印度和中亚等广大地区传播，并演变成一种特殊的历法。1027 年，罽宾的班智达瓦贡布来到西藏，与精通两种语言的西藏译师卓希绕札合作，翻译了《时轮本续注疏》。《时轮经》在西藏传播之后，藏族历算家围绕以

① 黄明信，陈久金. 藏历的原理与实践（藏汉对照）. 北京：民族出版社，1987. 269

“火兔年”（1027 年）为年首还是以“木鼠年”（644 年）为年首进行历法推算展开了辩论。结果是把两者都放弃，而改为适应“绕回”的年首，“绕回”是以 60 年为一个周期，相当于甲子的推算法。

以后，藏族出现了不少历算学家，14 世纪完成了一些著作。其中著名学者嘎玛巴·仁钦多吉于 1318 年完成了《历算综合论述》；另一位著名学者布顿·仁钦珠巴于 1323 年著成了《旦孜》一书，1327 年又著《算学知者欢喜》；1425 年，促布瓦始作以太阳为准进行推算的《促布瓦历书》。这时又形成了“洞人前者”和“洞人后者”两个历算学者群体。“洞人后者”由一批人名冠以“江措”的几个人组成，即普巴·伦珠江措、藏穷·曲札江措、解·挪桑江措、札穷·云旦江措，他们详细讨论了外时轮的所有要害要点，比“洞人前者”更精通数学，完成了《白荷教诫》、《央恰释解》等历算著作。“沙雄”（沙盘）在这时为数学家天文学家普遍使用[①]。

西藏的历算有许多派别，除前面提到的“山洞派”、“时轮派”、“央恰派”之外，还有“普巴派”等，都有著作传世。但不论是哪一派，都需要以较多的数学知识为工具进行计算。

用藏文写的纯数学著作，至少在 16 世纪以前还不见记载或传世。是否没有数学著作，尚不能定论。因此，目前只能间接地通过历法计算了解早期藏族的数学。

有两点应当说明：其一是西藏数学为 10 进位制，而在天文上则根据实际情况采用其他进位制，这和内地一样。其二是未见有使用筹算的记载，“沙雄”和筹算完全是两回事，因此“沙雄”是藏族独创的计算工具。

---

① 崔诚群觉，索朗班觉. 藏族天文历法史略. 西藏研究，1982 (2)：22～35

第二节　西夏党项羌族的数学

羌族是唐宋时代生活于今宁夏、甘肃、青海、四川等一带的民族。其中党项羌族逐渐强大，拓拔部的酋长拓拔赤辞被唐王朝封为西戎州都督，赐姓李。1038年，李元昊在兴庆府（今宁夏银川市）建国号曰大夏，史称西夏。辖地包括今宁夏全部，甘肃大部，陕西、内蒙古、新疆的一部分。大夏辖区内除党项羌族外，还有汉族（数量较大）、藏族、回鹘等其他民族。1227年蒙古灭大夏，作为一个地方政权来说，存在了将近200年。它先后与北宋、南宋、金并立，西南为吐蕃诸部。

党项羌族是一个勇敢善战、而又有创造性的民族，结合本民族的知识积累，又吸收其他民族的科技文化形成了独特的西夏文化。早在李元昊建立政权前后就以汉字为基础创造了西夏文字。西夏人写了很多书，有西夏文的，也有汉文的，设有印刷厂。西夏文也是方块字，因此活字印刷得到发展，有流传至今的世界上最早的印刷品[1]，十分珍贵。

在西夏的出版物中，有一批辞书，如《番汉合时掌中珠》，西夏文和汉文对照，是为学习汉文或学习西夏文准备的字典。《文海》是西夏文对字、词的简短解释。《同音》是一部西夏文韵书，它的西夏文直译为《音同》，而《同音》则为义译。原书最早刊于1125年，以后又几次修订、再版。在这些书中包括了大量数词和与数目有直接关系的词语。由于迄今尚未发现西夏的数学著作，因此这批书就成为研究西夏数学史的主要资料来源。

西夏文方块字的数词和汉字一样，也是一个字一个字的，其

① 史金波，雅森·吾守尔．西夏和回鹘对活字印刷的重要贡献．光明日报，1997年8月5日第五版．

最大单位到亿。现将汉、夏两者对应列下：

汉文	一	二	三	四	五	六	七
西夏文	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
汉文	八	九	十	百	千	万	亿
西夏文	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

对于大于10的数目也像汉字那样排列，下面举些例子：

十 四　　二 十　　五 百　　五 千

[illegible]

八 万　　四 千　　十 三　　万[1]

[illegible]

在西夏文《文海》和《文海·杂类》的叶口上有编号，前者最大号为“[illegible]”（九十三），后者最大号为“[illegible]”（二十一）[2]。

明确用作序数的数字写法有变化，有的是另外的字。此种情形多用于兄弟排行第几之类。例如：

---

① 这6个例子中的第5个采自《番汉合时掌中珠》，其余的采自李范文. 西夏陵墓出土残碑粹编. 北京：文物出版社，1984

② 史金波，白 滨，黄振华. 文海研究. 北京：中国社会科学出版社，1983. 136～355

第三　第四　第五　第六　第七　第八[①]

西夏文中对数词都有解释，但解释中并不分基数和序数，往往是有两种含义。有些数词几次出现，而且有差不多相同的解释。现列举如下：

一：此者孤独也，一个也，唯也，单也，独数之谓[②]。

独一：此者单独也，一也，一也，一也，一也，唯也，独数之谓。

二、双[③]：此者双也，二也，双也，双也，复双也，双也，第二也，俱二也，数之谓也。

三：此者第三也，行三也，数之谓。

四：此者第四也，行四也，数四之谓也。

五：此者第五也，五子也，数之谓也。此者五子也，行五也，五也，数之谓也。[④]。

六：此者第六也，六也，六子也，数之谓也。

第六：（同六）

七：此者第七也，七也，数七之谓也。此者第七也，行七也，七也，数之谓。

第七：此者行七也，第七也，兄弟序数行七之谓。

八：此者第八也，数是。

---

① 采自李范文. 同音研究. 银川：宁夏人民出版社，1986

② 所列资料均出于史金波，白滨，黄振华. 文海研究. 北京：中国社会科学出版社，1983.《文海》汉文译本. 原文为双行小字.

③ 是对同一个字桢的解释.

④ 中间的句号前后表示是两处的解释. 下同.

第八：此者第八子也，八之谓。

九：此者数九之谓。

十丈：此者十也，十也，丈也，数之谓也。

百：（缺）

千：此者千也，数十百则千之谓。此者一千也，千也，数之谓也。

万：此者一万也，万也，数之谓。

亿：（缺）

上面的数词资料，数目是一个完整的10进位制系统，其中“百”和“亿”没有给出独立的解释，不过“百”在《文海》和《文海·杂类》中解释其他数词如“千”和另外的词语时多次用到，10进位制无疑。“亿”的进位制则不见记载，只有字。“万”的解释未明确说出进位制，也许是原文有缺漏，应当像“千”那样：“此者一万也，数十千则万之谓”才完整。

关于度量衡的资料。

长度：丈、尺、寸，有这三个词，前面已有“十丈”的解释，“尺”、“寸”则没有。

容积：

抄：此者抄为速取也，语用亦人抄为。又算法中十抄算一合。

撮：此者十粟一粒，十粒一圭，十圭一撮，十撮一抄，十抄一合，十合一升，算量起处是也。

斛：此者十斗算一斛也。

其中没有“斗”字的解释，但在“斛”的解释中用到“斗”字。容积由小到大一律10进位制。即：

1粒＝10粟，1圭＝10粒，1撮＝10圭，

1抄＝10撮　1合＝10抄，1升＝10合，

1斗＝10升，1斛＝10斗。

和唐宋内地所用之容积制大体相同，但也有差别，内地没有

“粒”这个单位，有“粟”，规定“六粟为一圭”或“十粟为一圭”。实际上，“粒”是不合理的，一粟就是一粒，如果设“粒”为单位，那“粒”应是最小的。内地有时在“抄”与“合”之间还有一个单位“勺”，而西夏没有。

面积（田亩）：

亩：此者一边各五十尺，四边二百尺，算一亩。

顷：此者百亩为一顷也。

这里对“亩”的规定是边长为50尺的正方形的面积，即

1 亩=50×50=2 500 平方尺

如果5尺算1步，则为

1 亩=10 步×10 步=100 平方步

而内地一般是1亩为240平方步。因而西夏的“亩”比内地的亩小得多。这样规定的目的可能是为了变成百进位制，即

1 亩=100（平方）步

1 顷=100 亩。

重量：

镒：此者十黍一镒，十镒为铢，六铢一钱，四钱一两，此者称算用是。

铢：此者称算用也，十黍一丝，十丝一铢，六铢一钱，四钱一两，十六两一斤算。

斤：此者自少起分，算称星，十六两一斤也。

称：此者论计也，量用也，令分轻重也，称星之亦谓。

其中“镒”与“丝”为同一级单位，介于“黍”与“铢”之间。重量的进位制，和内地一样并不整齐，与唐宋内地相比，西夏在“黍”与“铢”间设单位“丝”，在“铢”与“两”之间设单位“钱”，但与前后单位的大小都无关系，如“六铢一钱，四钱一两”，实为内地的“二十四铢为一两”。

与数学有关系的词语，在《文海》和《文海·杂类》中相当

丰富，现选择一部分重要者列下：

大：此者大也，大也，巨也，又粗糙之亦谓。

小：此者小细也，小也，小块也，小也，不大之谓。

多：此者总也，多甚也，不等之义是。

少：此者无多也，微也，小块，少之义是也。

高：此者高上也，高也，上也，上也，高也，高也，高也，不低之谓也。此者高也，高上也，高上也，高也，高也，不低，所不至之义也。

下：此者下上之限用，测高用也。

中：此者当中也，中也，心中也，二者中间之谓。

平：此者齐也，平也，等也，不相差也。此者平坦也，广平也。

广平：此者阔也，平地也，广平地利之谓也。

厚：此者皮厚，有厚薄之谓也。此者广厚也，不薄之谓也。

半：此者半也，高下未满，不全之谓。

倍：此者增倍也，种倍增添，主不阙成利多，比原本多也。

等：此者同也，相等也，同无差异也。

长：此者长也，不短之谓。

计量：此者称也，论称也，分明也。

算：此者算也，根基也，令有无分明之谓也。

筹：此者射（?）物为筹，数算用也。

上面的资料，并不是西夏人给各该词语的定义，更不是按照数学的涵义所给出的科学概念，但另一方面也应承认，西夏人有非常丰富的数学知识。如果把数词、度量衡等和这批“大”、“小”等资料合在一起来考察，那么就会发现，西夏人已经形成了一个较为完整的算术系统，可以计算生活、生产、贸易和军事等方面的任何问题。西夏人肯定是把这门学问叫做“算学”。

西夏人的计算方法与西藏不同，西藏的藏族使用沙盘，以笔

算进行演算，而西夏人则用“筹”，上引“筹”的解释就是明显的例证。那条解释有两方面的内容，其一是“射（?）为筹”，可能是指的投壶游戏；其二是“数算用”的筹，即筹是一种计算工具。虽然西夏的算筹是什么样子不见记载，但是推想应和内地长期使用的算筹一样。

1985年到1986年，在宁夏灵武发掘了一批西夏窑址，出土陶器等物3 000多件。其中有数百枚像“棋子”的圆状片，如图1.1.3所示。直径一厘米左右，很少弧面形，黑、白二色。其中有一些刻有天干、地支，如丙、巳、庚、寅等字，可能是一种算具。在宋代钱易著的《南部新书》中记载了钟离（古县名，在今安徽凤阳县东北）令王仁岫善用“功算”之事，他用十二支牌子定算位，其上写有子、丑、……等十二地支。在西夏出土的圆形算子，亦应有同样作用，而黑、白二色以区别当五和当一①。

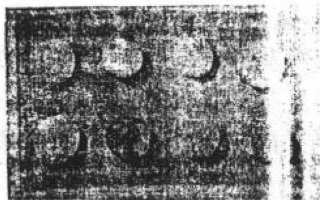


图 1.1.3

第三节　女真族的数学

女真族发展于东北，其先为古代之肃慎、靺鞨。首领完颜·阿骨打（完颜旻，1068～1123），于1115年建国号大金，建元收国。他去世后，由弟弟完颜晟（1075～1135）即位。1125年，金灭辽，1127年灭北宋，原来辽的辖地和北宋淮河以北的部分都属于金。最初建都于会宁（位于今黑龙江哈尔滨市东南阿城县），不久移于燕（今北京市西南部），是为中都，1215年又迁至汴（今河南省开封

---

① 李培业. 西夏国珠算在宁夏灵武发现. 珠算，1996（1）：2

市),1234年被蒙古所灭。金政权与西夏、南宋并存一百年。

金辖区内大多数为汉人，其次是契丹人，实际上是以女真族为主体的多民族杂居区。由于这种环境，女真族吸收了汉、契丹以及其他民族的各种文化和技术。

女真族早期没有文字，据载："生女直之俗，至昭祖时稍用条教，民颇听从，尚未有文字，无官府，不知岁月晦朔，是以年寿修缺莫德而考焉。"[①] 此时约当11世纪初，距建立金朝还有一百年。又载：女真"税赋无常，随用度多寡而欽之。与契丹言语不通，而无文字。赋欽科发，刻箭为号，事急者，三刻之。"[②] 又载："别无文字，刻木为契，谓之刻字。赋欽调度皆刻箭为号，事急者，三刻之。"[③] "刻木为契"是无文字时人们常用的记事记数方法之一，各民族的刻法多不相同。大体有两种形式：一种是在木片上刻代表事物和数量的约定俗成的符号；二是在木片的一个边上或两个边上刻缺口，以缺口数代表某种数目[④]。女真族当时所用者为何种，没有进一步记载，很可能两种都用。

女真人灭亡北宋以后，认识到文字的重要，于是在天脊元年(1138年）正月颁布女真小字，同年九月"诏百官诰命，女真、契丹、汉人各用本字，渤海同汉人。"[⑤] 就是说同时使用三种文字。后来废去契丹字。又制定女真大字，规定"自大定四年，以女真大小字译经书颁行之。"[⑥] 大定四年为1164年。据记载，用女真文翻

---

① 《金史》卷1"世纪".

② [佚名] 金志・初兴本末.《大金国志》附录三，其中"刻箭"误为"射箭"，"三刻"误为"三射".

③ 《三朝北盟会编》卷3.

④ 李迪. 中国数学通史（上古至五代卷). 南京：江苏教育出版社，1997. 24～28

⑤ 《金史》卷4"熙宗本纪".

⑥ 《金史》卷51"选举一".

译过一些汉文著作，但未见有算学方面的，也没有用女真文写出数学书。在金的辖区内有一批汉族数学家，并有很大的成绩，将在本编第三章介绍。

女真族由于和汉族、契丹族生活在一起，互相学习，数学水平提高得很快。在女真文中有丰富的数词就是例证。女真文字也是方块，但是和汉字、西夏字不同，和契丹字也不一样。例如“15”这个数目，汉文为“十五”，西夏文为“[illegible]”，契丹文为“[illegible]”，而女真文只用一个字“[illegible]”等等。女真文中最大的数目字是“万”（[illegible]）。现据人们的研究、归类，把女真文数词列下①：

女真字	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
汉　字	一	二	三	四	五	六	七
女真字	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
汉　字	八	九	十	十一	十二	十三	十四
女真字	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
汉　字	十五	十六	十七	十八	十九	二十	三十
女真字	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
汉　字	四十	五十	六十	七十	八十	九十	百

① 道尔吉，和希格．女真译语研究．内蒙古大学学报（哲学社会科学版）增刊，1983

女真字	[illegible]	[illegible]
汉　字	千	万

还有些与数学相关的词，如：

女真字	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
汉　字	大	小	长	短
女真字	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
汉　字	厚	薄	重	高

女真族在实际活动中大量使用数学知识，如金初的“猛安谋克”制度，是指女真诸部的编制。平时从事渔猎等各种劳动，有军事行动时则壮者皆为兵，“其部长曰孛董，行兵则称曰猛安、谋克，从其多寡以为号，猛安者千夫长也，谋克者百夫长也。”① 是10谋克为1猛安。后来随着政权的巩固，各项制度逐步建立和完善，在户口统计、税收、金融、水利、贸易、田亩计算等诸多方面大量使用数学，其中许多都是采用原来北宋的算法，特别是各种单位更是如此。如货币铜钱用贯、缗、文，田亩则规定“量田以营造尺，五尺为步，阔一步，长二百四十步为亩，百亩为顷。”②

在水利工程方面所用数学知识更多，例如“卷扫”、“造船物料”、“定功脚例”、“陆运”等等，都需要计算③，详细见第五编第一章，这里不赘。

女真族由“刻木为号”过渡到各种计算后，使用什么工具，或

① 《金史》卷四十四“兵志”.

② 《金史》卷四十七“食货二”.

③ ［元］沙克什. 河防通议，所引“监本”部分. 据《丛书集成初编》本.

说是用何种方式方法进行演算？尚未查到文献资料。但有一条资料说明，当时北方普遍使用算筹，耶律楚材说：“庚辰正月，梦旃栝刹澄公托万松老人乞算筹于予。予以九十一茎赠之，仍作颂一绝。”[①] 这是说做梦时有人向他要算筹，可见他头脑里记得这种算具。“庚辰”系 1220 年，距金亡还有 14 年，不过当时金的北部已归蒙古，耶律楚材随成吉思汗西征，是在西域写的这段话。原来的宋、辽和西邻西夏都用算筹进行演算，在这种环境下，女真族也只能使用算筹。

---

① ［元］耶律楚材．湛然居士文集第六卷“梦中偶得”．北京：中华书局，1986．

第二章 金历法中的数学

本章主要讨论金历法中所用数学计算知识，重点是几何方法和插值法的应用。

第一节 金对历法的研究及相关问题

女真族最初没有成文历法。完颜晟于 1125 年灭亡辽国后，迁都燕京（今北京市西南部），后来在那里建有天文台，并把北宋的天文仪器从汴梁（开封）运到燕京，置于天文台。至于是否实地进行过天文观测，没有记载，估计是使用过。作为一个政权来说，历法是相当重要的。因此，在灭亡北宋的第二年（1127）便由杨级编出来一部成文历法，叫《大明历》①，1137 年正月颁行。

杨级为什么能如此之快编出一部历法？很可能是他参考了北宋的历法。《金史》说："然其所本，不能详究，或曰因宋《纪元历》而增损之。"②《纪元历》是北宋最后一部历法，从 1106 年开始颁行，一直到南宋初年的 1167 年。不过杨级《大明历》和《纪元历》有多少共同处，因《大明历》不传而难以判断。现知两者的上元积年相差甚大，《纪元历》为二千八百六十一万三千四百六十一年，而《大明历》则为三亿八千三百七十六万八千六百五十七年。杨级到底是怎样编成《大明历》的目前尚不清楚。

《大明历》颁行 20 年后，逐渐出现差误，几次交食预报不准，

---

① 此《大明历》与南北朝时祖冲之所编之历法同名，但两者无关.

② 《金史》卷 21 "历志上".

如正隆戊寅（1158 年）三月辛酉朔，司天言当日有日食，不食。对大定癸巳（1173 年）五月壬辰朔日食、甲午（1174 年）十一月甲申朔和丁酉（1177 年）九月丁酉朔日食的预报不是先天就是后天。于是，改历问题就被提到日程上来了。命赵知微重修《大明历》，大安二十一年（1181 年）[1] 历成。同时耶律履也造一新历法，名为《乙未历》。两部历法，孰优孰劣一时难于断定，正好在二十一年十月望发生月食，因而利用这个机会命任忠杰与天文官员测验所食时刻分秒，“比校知微、履及见行历之亲疏”，结果赵知微历为好，因而被采用[2]。为叙述明确起见，本书将按通常叫法把赵知微重修《大明历》称为《知微历》。

赵知微为何许人，没有任何资料。既然他能受命改历，说明他必是当时很有影响的天文历法家。不仅如此，而且根据《知微历》将看到他有较高数学水平。

耶律履（又作移剌履）（1131～1191），字履道，辽东丹王突欲七世孙，父耶律聿鲁，早亡，过继给他的伯父耶律德元。耶律履学术上精通《易经》、《太玄经》等古代经典，“至于阴阳历数无不精究。尝以乡赋一试，有司以露索为耻，遂不就举。荫补国史掾。”[3] 在金朝当了小官，后来晋升很快，一直到礼部尚书，更拜参知政事。

金代有两位重要的天算家，他们是张行简和杨云翼。两人差不多同时代，张行简稍早。此外，还有一位麻九畴也在本节予以介绍。

张行简（？～1215）字敬甫，莒州日照（今山东日照县）人，其父张暐，博学该览，正隆五年（1160 年）进士及第，官至礼部

---

① 《金史》原著“二十一年”误为“十一年”，今依中华书局本校勘改正.

② 《金史》卷 21“历志上”.

③ ［宋］宇文懋. 大国国志卷 29“耶律履”.

尚书。张行简继承家学，颖悟力学，淹贯经史。大定十九年（1179年）登进士第一，被任为应奉翰林文字。不久母亲去世，守孝在家，“杜门读书，人莫见其面”。守孝期满，复任，以后累迁礼部郎中。

1189年初金世宗死，其孙完颜璟即位，第二年改元明昌。正当此时，司天台的刘道用等改进新历，完颜璟诏学士院更定历名[①]。张行简认为应当“复校测验，俟将来月食无差，然后赐名。”这个意见被采纳。于是下诏由翰林侍讲学士党怀英（1134～1211）等负责复校工作。党怀英是当时著名文人。“能属文，工篆籀，当时称为第一，学者宗之”[②]，但是否懂得天文历法，不见记载。不过，他对复校刘道用等的新历法比较认真，因为要等待某些特殊天象或历法上的设置，所以前后用了二三年时间。结果在三个问题上出现了很大的差错：明昌二年十二月十四日（1192年12月31日），金星和木星都在危宿13度，而刘道用历在十三日，差一日；明昌三年（1193年）应闰三月，刘道用历不置闰；同年四月十六日（1193年5月26日）夜月食，刘道用历所报时刻不同。

根据上述复校结果，做出了如下的结论：“道用不曾考验古今所记，比证事迹，辄以上进，不可用”。刘道用因此被判处一年徒刑，参与造历的长行彭徽等4人“各杖八十罢去”[③]。刘道用等本想可以通过上进新历讨个晋升的机会，岂料落得徒刑一年的下场。但是，因所进历法不准确而给以刑罚也是罕见的。

刘道用等受到刑罚是否与张行简有关，没有记载。不过这件事的起因是张行简提出，提议本身并非坏意。

过一段时间，张行简改任礼部侍郎、提点司天台。提点司天

① 在中国历史上经常利用改换年号等时机进上新历的做法，刘道用等大约也是如此.

② 《金史》卷125“党怀英传”.

③ 《金史》卷106“张行简传”.

台一职相当于天文台台长，负责管理天文台工作。承安五年（1200年）迁侍讲学士，提点司天台如故。泰和六年（1206年）召为礼部尚书，兼侍讲、同修国史。这时秘书监进《太一新历》，诏张行简校之[①]。这部历法的内容如何，毫无所知，校验的结果我们将在以下进行讨论。

张行简著作很多，"所著文章十五卷，《礼例纂》一百二十卷，会同、朝献、禘祫、丧葬，皆有记录，及《清台》、《皇华》、《戒严》、《为善》、《自公》等记，藏于家。"[②] 在这些书中，《清台》一系种讲述天文台[③]工作的著作，可能是他任提点司天台时的记事，可惜没有保存下来。

张行简在他任提点司天台时"尝制莲花、星丸二漏以进，章宗命置莲花漏于禁中，星丸漏遇车驾巡幸则用之。"[④] 其中莲花漏是人们较为熟悉的传统计时器，名称起于北宋初期的燕肃（961～1040），他于1031年上莲花漏法[⑤]，后来被许多人所采用。星丸漏以往论者甚少，实际上它与辊弹漏是同一种计时器，又称为木漏，当时在全国南北方比较流行[⑥]。

看来，在一段较长的年代里，张行简是金代天文台的主要负责人。

杨云翼（1170～1228），字之美，其先赞皇桧山（今河北高邑县内）人，后迁于平定之乐平县（今山西昔阳）。他的曾祖、祖父和父亲都在金朝为官。杨云翼"天资颖悟，初学语辄画地作字，日

---

① 《金史》卷106"张行简传".

② 《金史》卷106"张行简传".

③ 早在西汉时就把天文台叫清台，在周代称灵台，唐代又有仰观台之称. 南宋秦九韶在所著《数术大略》中有"计作清台"一题，讲天文台建设中的计算问题.

④ 《金史》卷22"历志下".

⑤ [宋] 王应麟.《玉海》卷11.

⑥ 李迪."星丸漏"复原研究. 第二届东方天文学国际会议论文. 中国鹰潭. 1995

诵数千言"，明昌五年（1194 年）登进士第一，任命他为承务郎、应奉翰林文字。后来为太常博士，又升为太常寺丞，兼翰林修撰[①]。不久为司天台长行。泰和四年（1204 年）他进《天象传》一书[②]。

大概是由于杨云翼在学术上较为出众，引起张行简的注意，大安元年（1209 年）向朝里"荐其材，且精数术"，召授提点司天台，兼翰林修撰，马上又兼礼部郎中。张行简本人原为提点司天台，很可能是他主动把这个职务让给了杨云翼。不久，杨云翼因病辞归。几年后"起授前职，兼吏部郎中。贞祐三年（1215 年）转礼部郎中，兼提点司天台。兴定元年（1217 年）迁翰林侍讲学士，兼修国史，知集贤院事，仍兼前职。二年拜礼部尚书，兼职如故[③]。

因蒙古军攻占金中都，金宣宗于 1215 年南迁汴京，把原来北宋的天文台仪器遗弃在中都。因此，汴京便没有天文仪器，只是从中都去了一些天文官员。稍微稳定之后，兴定（1217～1222）中，天文官便提出制造浑仪和进行测候等问题。据载"司天台官以台中不置浑仪及测候人数不足，言之于朝，宜铸仪象，多补生员，庶得尽占考之实。"[④]

金宣宗召杨云翼问之。杨云翼对曰："国家自来铜禁甚严，虽罄公私所有，恐不能给。今调度方殷，财用不足，实未可行。"[⑤] 金宣宗完颜珣未置可否，实际上是同意铸造浑仪。杨云翼所说的是实情，当时金政权三面受敌：北有蒙古，西北有西夏，南有南宋，财力物力都不足用，根本无力制造浑仪。几天之后，完颜珣又提起此事，"于是止添测候之人数员，铸仪之议遂寝。"[⑥] 再过 12 年

---

① 《金史》卷 110 "杨云翼传".

② 《金史》卷 12 "章宗四".

③ 《金史》卷 110 "杨云翼".

④ 《金史》卷 22 "历志下".

⑤ 《金史》卷 22 "历志下".

⑥ 《金史》卷 22 "历志下".

金朝就灭亡了，铸造浑仪之事终金之世从未进行[①]。

哀宗完颜守绪于1224年即位，首命杨云翼摄太常卿，寻拜翰林学士，很快复为礼部尚书。晚年曾奉命出使西夏，商议互市问题。1227年西夏被蒙古所灭，杨云翼也于第二年去世。

杨云翼是一位博学的学者，著作很多，计有文集若干卷，校《大金礼仪》若干卷，《续通鉴》若干卷，《周礼辨》一篇，《左氏》、《庄》、《列赋》各一篇，《五星聚井辨》一篇，《悬象赋》一篇，《勾股机要》、《象数杂说》等著作藏于家[②]。最后二种属于数学方面的著作，可以说杨云翼是金代的一位数学家。

又，前面提到秘书监曾进《太一新历》，并由张行简校过。实际上，真正进行校正的是杨云翼，也许是张行简把任务交给了杨。记载上说是“尚书省檄云翼参订，摘其不合者二十余条，历家称焉。”[③] 得到同行们的好评。

杨云翼与完颜琦、赵秉文（1159～1232）、雷渊、元好问（1190～1257）、李汾等交善[④]，其中赵秉文是著名数学家李冶的老师，而元好问是他的好朋友。因此，杨云翼有机会与李冶相接触，实际上他是李冶的老师。还有一点是应当考虑的，那就是杨云翼早期活动的山西当时是数学发达的地区，他的数学知识的来源不能与该地区没有关系。

还有一位精通数学的麻九畴，在这里略加介绍。麻九畴（1185～1234）字知几，易州（今河北易县）人。幼时即能认字写字，一时目为神童。金章宗曾召见，将二十岁入太学，有文名。他在开封与河南省考试都很好，但廷试因误受贬斥而未中。后来赐他进

---

① 《金史》卷11“章宗本纪三”载承安三年（1198）六月“奉职丑和尚进浮漏、水称、影仪、简仪图，命有司依式造之.”未必造出.

② 《金史》卷110“杨云翼”.

③ 《金史》卷110“杨云翼”.

④ 《金史》卷85“世宗诸子·琦”.

士及第，授予他太常寺太祝，权博士，很快升为应奉翰林文字。天兴元年（1234 年）蒙古大军进入河南，麻九畴带家出走，为兵士所得，驱至广平（今河北广平），病死。麻九畴博通五经，于《易》、《春秋》为尤长。后喜北宋邵雍（1011～1077）的《皇极经世书》，“因学算数，又喜卜筮、射复之术。晚更喜医，与名医张子和[1] 游，尽传其学，且为润色其所著书。”[2] 他到底掌握多少数学知识，很难说，估计不会太高。

以上所述为金代历法及历算家的简单情况，总体来说不如南宋。历法改革，或编制新历前后共 4 次，两次经校验结果不精而不被采用，因此金代所行之历法仅有《大明历》及在其基础上重修的《知微历》。《大明历》不传，《知微历》有较高数学水平。

第二节 《知微历》及其求交食食限辰刻的几何方法

《知微历》的结构和中国其他历法差不多，分为步气朔、步卦候、步日躔、步晷漏、步月离、步交会、步五星七部分，编排得非常整齐。它们每一部分都先给出一批常数和进位的规定，然后又分为若干小项目，大都给出了计算，有些还给出了数表。

需要注意的是小数进位不是整个历法有统一规定，而是视实际需要各部分有不同安排。现将各部分的“秒母”（即小数秒的分母，如果分子满母则进一位）列下：

步气朔：秒母九十；

步卦候：秒母一百；

步日躔：秒母一万；

---

① 张子和即名医张从正（1156？～1228）.

② 《金史》卷 126 “麻九畴”.

步晷漏：秒母一百；

步月离：秒母一万；

步交会：秒母一万，分秒母一百；

步五星：无明确记载，但各星数依据的秒数都小于百，可见秒母都是一百。

在实际运算中，根据需要，《知微历》常把小数分为两段带两个单位，如分为“分”和“秒”，在一些表中分段写出数字而不加单位，但能体会出是何单位。

《知微历》中的数学知识，从水平来看并不太高，但却有其特点，严敦杰曾指出其中的两项：用几何方法求日、月食食限辰刻和招差术①。以下将沿着他的思路分别予以讨论。本节先讨论前者。

《知微历》的第六部分“步交会”中有不少问题需要用几何方法予以解释，不过原著中没有一幅几何图形。就实质来说，和一般几何解释不太一样，这里相当于使用了几何方法。其中两个问题比较典型，依次介绍如下：

“求日食定用分”：

“置日食之大分，以三十分相减相乘，又以二千四百五十乘之，如定朔入转算外转定分而一，所得为定用分。减定余，为初亏分。加定余，为复圆分。各以发敛加时法求之，即得日食三限辰刻。”

日食由月亮走在太阳和地球之间引起，使地球上的某一条带地区看不见或只能看见一部分太阳。以下讨论假定月面和太阳面直观上相等。

设 S 为太阳面中心，M 为月面中心，AE 为 30 分。月由右向

---

① 严敦杰．宋金元历法中的数学知识．《宋元数学史论文集》．北京：科学出版社，1966．210～224

左运动，当月到 M_1 时与日面相切，即初亏，到 M 时为食甚，到 M_2 时为复圆，其中 CD 为食分，即引文中之大分。

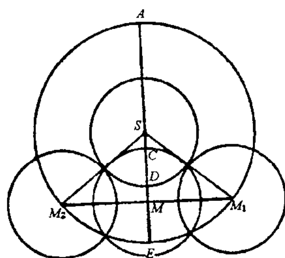


图 1.2.1

在引文中，所谓“日食之大分与三十分相减相乘”，是指

$$MM_1^2=(AE-CD)\cdot CD$$

此式是如何来的，原著中未讲。严敦杰给以补证。

由图形知

$$CD=SD+CM-SM=SE-SM=ME$$

又，$\triangle SMM_1$ 为一直角三角形，SM_1 为弦，SM 为勾，因为 $AS=SM_1$，所以 AM 为勾弦和，ME 为勾弦较。由赵君卿之 $b^2=(c+a)(c-a)$，则有

$$MM_1^2=AM\cdot ME$$

$$=(AE-ME)\cdot ME$$

因已得 $ME=CD$，故有

$$MM_1^2=(AE-CD)\cdot CD$$

求到这里，问题尚未解决。由上述仅知日食的初亏、食甚和复圆的几何位置，而不知此三限的辰刻。为此，要求出“定用分” m，必须把上式开方除之，即

$$MM_1=\sqrt{(AE-CD)\cdot CD}$$

按本文“又以二千四百五十乘之，如定朔入转算外定分而一”，有

$$m=\frac{2\ 450\times MM_1}{\text{定朔入转算外定分}}$$

设 n 为定余，则

$m-n$=初亏分

$m+n$=复圆分

m：食甚

但是还要“各以发敛加时法求之”，才能得到三限辰刻。

“求月食定用分”：

“置月食之大分，与三十五分相减相乘，又以二千一百乘之，如定望入转算外转定分而一，所得为定用分。加减定余，为初亏、复圆分。各如发敛加时法求之，即得月食三限辰刻。”

“月食既者，以既内大分与十五相减相乘，又以四千二百乘之，如定望入转算外转定分而一，所得为既内分。用减定用分，为既外分。置月食定余减定用分，为初亏。因加既外分，为食既。又加既内分，为食甚。即定余分也。再加既内分，为生光。复加既外分，为复圆。各以加时发敛发法求之，即得月食五限辰刻。”所谓“月食五限”，即初亏、食既、食甚、生光和复圆。月食发生在望，地球运行在月亮与太阳之间。地球挡住太阳光，而产生月食。中国古代没有地球概念，认为有一个很奇怪的东西，人用肉眼看不见，实际是地球阴影，把它叫“暗虚”。

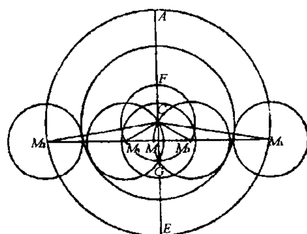


图 1.2.2

设 C 为暗虚心，$AE=35$ 分，$FG=15$ 分，M_1 为初亏，M_3 食既，M 食甚，M_4 生光，M_2 复圆，AM 为食分，FG 为既内食分。由此，引文的前一段的前半部分有

$$M_1M^2=(AE-AM)\cdot AM$$

或

$$M_1M=\sqrt{(AE-AM)\cdot AM};$$

引文的后一段的前半部分，类似地有

$$M_3M^2=(FG-FM)\cdot FM$$

或

$$M_3M=\sqrt{(FG-FM)\cdot FM}$$

再往下处理，和“求日食定用分”一样，不再赘述。

在上述两引文中均无“开方除之”一语，但无此语，意思不完整，因此本书同意严敦杰的作法，在解释中加上了。实际应当是“……相减相乘，开平方除之”。

中国历史上一向不这样计算日食三限和月食五限问题，因此《知微历》是一革新作法。严敦杰说：“此法证明虽可用我国传统的勾股方法求得，但在我国古代天文学中确是创见，其后元授时历即用此法求日月食限辰刻。”

在《知微历》中，反复使用“相减相乘”法，是一种传统算法，它开始于唐代后期，盛行于宋代，直到北宋最末的《纪元历》仍是如此，后来一直被沿用，下面将要讲到的《授时历》也莫能外。值得注意的是：《知微历》中“求月去黄道度”（计算月亮黄极纬）的方法与《纪元历》所用公式全同[①]，都是由两次“相减相乘”再相乘而得，可用下面的统一形式表示

$$p=\frac{1}{q}\left\{181.8972-\left[n-\frac{(90.9486-n)\,n}{r}\right]\right.$$
$$\left.\times\left[n-\frac{(90.9486-n)\,n}{r}\right]\right\}$$

展开后是个四次函数。

根据上述事实，可以看到《知微历》与《纪元历》之间的关系。

---

① 陈美东. 古历新探. 沈阳：辽宁教育出版社，1995. 285～286

第三节　《知微历》对差分的应用

差分方法是中国历法计算中常用的方法之一，并且多以“立成”的形式予以利用。因此，在一些历法著作中包括有大量的立成，例如五代时马重绩所编《调元历》22卷，而立成就达12卷之多[①]。立成是中国历史上对数表的简称，即造出现成的数表，需要数据时查表立即得到。就目前所知来看，流传下来的完整的立成表不多。立成中所包括的数表，估计以差分为主。虽然原表已不存在，但是根据记载很容易复原出来一些[②]，《知微历》就属于这种情况。

在“步晷漏”中有“二十四节气陟降及日出分”一项，给出了一张表，但不是立成，如图1.2.3。其中的每个节气中的每一日都有“日出分”，且每日都存在“陟降”问题，因此每个节气的十五日就应有一立成。由于书中给出了差分的最高一阶和有关的几个初始值，所以可以复原出24份差分表来。严敦杰早在20世纪60年代就已复原出1份（以大雪为例），下面再以芒种为例复原1份。书中给出的初始值及最高阶差分为：

增损差：增 初七　一十九
　　　　　 末八　二十三　　加减差：加八

陟降率：陟九三十五　　　初末率：初一　一十五
　　　　　　　　　　　　　　　　末空　七　六

其中“加减差”为最高阶差分（三阶），“增损差”为二阶的首末二值，“初末率”为一阶的首末二值。于是有本卷书第31页的表（表1.2.1）。

---

① 《旧五代史》卷140“历志”.

② 李迪. 中国数学通史（上古到五代卷）. 南京：江苏教育出版社，1997. 325～330、374～375

二十四节气朓降及日出分

恒气	增损差	加减差	朓降率	初末率	日出分
冬至	增 初九 二十六 末七 九十六	减十	朓一十 四十	初空 五 五十 末一 二十六 四	一千五百六十七 九十二
小寒	增 初七 八十九 末六 五十九	减十	朓二十八 七十三	初一 三十六 末二 三十七 三十六	一千五百五十七 五十二
大寒	增 初六 五十二 末五 二十二	减十	朓四十三 五十六	初二 四十三 末三(五九) 二十五 一十八	一千五百二十八 七十九
立春	增 初五 一十八 末三 八十八	减十	朓五十五 一十九	初三 二十九 末三 九十二 四十二	一千四百八十五 二十三(六〇)
雨水	增 初三 八十二 末二 五十二	减十	朓六十三 九十	初三 九十五 五十 末四 三十九 八十八	一千四百三十四
惊蛰	增 初二 四十八 末一 三十八	减十	朓六十九 一十八	初四 四十四 末四 六十七 一十六	一千三百六十六 一十四
春分	损 初一 三十六 末二 四十	加八	朓六十四 六十九	初四 三十七 末四 一十 六十八	一千二百九十六 九十六
清明	损 初二 五十 末三 五十四	加八	朓五十九 九	初四 八十 五十 末三 六十六 二十二	一千二百三十二 二十七
谷雨	损 初三 六十五 末四 六十九	加八	朓五十 八十四	初三 六十二 末三 三 六十二	一千一百七十三 一十八
立夏	损 初四 八十 末五 八十四	加八	朓三十九 八十六	初二 九十八 五十 末二 二十四 二	一千一百二十二 三十四
小满	损 初五 九十八(六一) 末七 二	加八	朓二十六 六	初二 一十六(六二) 末一 二十五	一千八十二 四十八
芒种	损 初七 一十九 末八 二十三	加八	朓九 三十五	初一 一十五 末空 七 六	一千五十六 四十二
夏至	增 初八 三十七 末七 三十三	减八	降九 三十五(六三)	初空 四 五十 末一 一十四(六四) 四十	一千四十七 七

图 1.2.3 《知微历》中“二十四节气朓降及日出分”(部分)

表 1.2.1　芒种陟降表

日次	陟率	一阶差 Δ_1	二阶差 Δ_2	三阶差 Δ_3
初日	0			
		1.150 0		
一日	1.150 0		−0.071 9	
		1.078 1		−0.000 8
二日	2.228 1		−0.072 7	
		1.005 4		−0.000 8
三日	3.233 5		−0.073 5	
		0.931 9		−0.000 8
四日	4.165 4		−0.074 3	
		0.857 6		−0.000 8
五日	5.023 0		−0.075 1	
		0.782 5		−0.000 8
六日	5.805 5		−0.075 9	
		0.706 6		−0.000 8
七日	6.512 1		−0.076 7	
		0.629 9		−0.000 8
八日	7.142 8		−0.077 5	
		0.552 4		−0.000 8
九日	7.694 4		−0.078 3	
		0.474 1		−0.000 8
十日	8.168 5		−0.079 1	
		0.395 0		−0.000 8
十一日	8.563 5		−0.079 9	
		0.315 1		−0.000 8
十二日	8.878 6		−0.080 7	

续表

日次	朓率	一阶差 Δ_1	二阶差 Δ_2	三阶差 Δ_3
		0.234 4		−0.000 8
十三日	9.113 0		−0.081 5	
		0.152 9		−0.000 8
十四日	9.265 9		−0.082 3	
		0.070 6		
十五日	9.336 5①			

这是由差分表反求某日的朓降率（本例为朓率）。在计算中有“初、末”二数的值都是由“初”数开始到“末”数止。

最末一日（十五日）的朓降率可由下列计算得到：

$$1.150\,0\times15-\frac{15\times14}{2}\times0.071\,9-\frac{1}{6}\times15\times14\times13\times0.000\,8=9.336\,5$$

设所求之朓降率为 $f(n)$，则上面的计算步骤相当于

$$f(n)=n\Delta_1-\frac{n(n-1)}{2!}\Delta_2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta_3\quad(※)$$

实际上，上面的差分公式适合于从 $n=2$ 到 $n=15$ 的所有情形。例如

$$f(2)=2\times1.150\,0-\frac{2\times1}{2}\times0.071\,9-\frac{2\times1\times0}{6}\times0.000\,8$$
$$=2.300\,0-0.071\,9-0=2.228\,1$$

$$f(3)=3\times1.150\,0-\frac{3\times2}{2}\times0.071\,9-\frac{3\times2\times1}{6}\times0.000\,8$$
$$=3.45-0.215\,7-0.000\,8$$
$$=3.233\,5$$

① “9.336 5”在书中的记载为“朓九三十五”(9.35)，与差分表、计算均不合.

$$f(14)=14\times1.1500-\frac{14\times13}{2}\times0.0719-\frac{14\times13\times12}{6}\times0.0008$$
$$=16.1-6.5429-0.2912=9.3365$$

公式（※）是差分表的公式化，二者完全一致。只要知道每个节气的初始值和最高阶差分，便可计算出一年中某日的陟降率。但有 6 日为例外，《知微历》中有“二分前后陟降率”一项，即讲此问题，即

“春分前三日太阳入赤道内，秋分后三日太阳出赤道外，故其陟降与他日不伦，今个别立数而用之。”

“惊蛰，十二日，陟四六十一，一十六。此为末率，于此用毕。其减差亦止于此。十三日，陟四四十一，六。十四日，陟四三十六，九十。十五日，陟四一。”

“秋分，初日，降四三十八。一日，降四三十九。二日，降四五十七。三日，降四六十八。此为初率，始用之。其加减亦始于此。”

此种例外，从记述来看有理论依据，但必须通过具体计算才能知道变化情况。

有一重要问题要稍作讨论，即《知微历》是用差分表还是用公式（※）求得每日陟降率的？记载中没有明确表述，同没有立成一样，也没见到公式（※）。可是，《知微历》的作者绝不可能逃脱以上两种途径。就当时情况来看，立成这条途径已是历法家的轻车熟路。如果一位历法家连造立成表都不会，那他的水平就太低了。因此，推测《知微历》作者很可能是造了立成表（差分表），他是否不知道利用公式（※）呢？也不见得。因为该公式比较简单且容易发现。还有，对每节气最末一次的“初末率”也可用类似方法求得，设 $f(1)$ 为“一日”的“陟降率”，则

$$\Delta_1=f(1)-14\Delta_2-\frac{14\times13}{2}\Delta_3 \qquad (※※)$$

如大雪节气的 Δ_1，为

$$\Delta_1 = 1.2850 - 14 \times 0.0802 - \frac{14 \times 13}{2} \times 0.0010$$
$$= 1.2850 - 1.1228 - 0.0910$$
$$= 0.0712。$$

根据这些情况，可以认为《知微历》作者可能用过公式（※），而（※※）也该在使用之中。

第三章　北方的民间数学研究

公元12、13世纪的中国北方，先是在金的统治下，后又为蒙古贵族的统辖区。许多当地知识分子感到仕途暗淡，或不愿为“异族”工作或其他原因，流落山林，其中一部分人对数学等自然科学发生兴趣，进行学习研究。当时以某些较有影响的知识分子为核心形成一些散在民间的学术群体，甚至形成学派。如医学方面的“易水学派”等。本章将集中讲述与数学有关的民间研究，地区在以今河北、山西为中心的一带，其中关于天元术的形成和以刘秉忠为代表的“紫金山学派”为重点。

第一节　天元术的形成和发展

天元术是金元时代中国数学上的重要成就，早已在国内外引起人们的注意，本节讨论它的形成问题。首先我们引录下面与此问题有直接关系的两条记载，然后以它们为中心进行分析和探讨。祖颐说：

“厥后[①]平阳蒋周撰《益古》、博陆李文一撰《照胆》、鹿泉石信道撰《钤经》、平水刘汝谐撰《如积释锁》，绛人元裕细草之，后人始知有天元也。平阳李德载因撰《两仪群英集臻》兼有地元，霍山邢先生颂不高弟刘大鉴润夫撰《乾坤括囊》末仅有人元二问[②]。李冶说：

---

① “厥后”指“十部算经”之后.

② ［元］祖颐．松庭先生四元玉鉴后序.

“予至东平，得一算经，大概多明如积之术，以十九字志其上下层数。曰：仙、明、霄、汉、垒、层、高、上、天、人、地、下、低、减、落、逝、泉、暗、鬼。此概以人为太极，而以天、地各自为元而陟降之。其说虽若肤浅，而其理颇为易晓。予遍观诸家如积图式，皆以天元在上，乘则升之，除则降之。独太原彭泽彦材法，立天元一在下。凡今之印本《复轨》等书，俱下置天元者，悉踵习彦材法耳。彦材在数学中，亦入域之贤也。而立法与古相反者，其意以为天本在上，动则不可复上，而必置于下，动则徐上。亦犹易卦，乾在在下，坤在在上，二气相交而为太也。故以乘则降之，除则升之。求地元则反是。”①

这两段资料，可以说基本上把天元术的形成讲清楚了。

首先应当明确的是，天元术是一种代数方法，它不是解方程，而是列方程。解方程的方法，从《九章算术》以来已逐渐完善，到北宋形成了适合于任何次的解法——增乘开方法。不过传统的解法，直到明代还经常有人使用。但是列方程却没有一种较为普遍适用的方法，实际上在一些著作中对列方程的方法的要求已经呼之欲出了。

根据上述资料，可以把天元术的形成分为四个阶段：第一个阶段为预备阶段，第二个阶段为初创阶段，第三个阶段为简化阶段（或叫成熟阶段），第四个阶段为推广阶段。以下将按阶段进行讨论。

第一阶段

本阶段甚至可以从王孝通起算，他列三次方程很吃力，实际上是由体积倒过来，一开始也不知何者为未知数。这一点到北宋时也没有改善，刘益的方程全由图形演段而来，贾宪同样用传统方法列方程。

---

① ［元］李冶．敬斋古今黈卷之三．

平阳蒋周撰《益古》是很重要的一步。北宋后期有一平阳奇士蒋舜元于1080年撰《应用算法》一卷[①]，很可能就是蒋周，此人姓蒋名周字舜元[②]。明程大位在其书目中列有《益古算法》和《应用算法》，未记作者，应均是蒋周的著作。南宋末，杨辉在著作中引《应用算法》七则[③]。李冶在《益古集》的基础上撰《益古演段》，此书应即蒋周的《益古》。《益古集》用"条段法"列方程，全由图形的面积、线段的演算，不设未知数，很繁杂。不过条段法比起刘益的演段法更有条理些。这就给人们建立某种简便的列方程方法提供了思考的出发点。

但是，事情并不那样简单，人们并没有立即建立起什么新方法。祖颐提到了蒋周以后的两部书：《钤经》和《照胆》。《照胆》没有任何其他资料，不好多说，而《钤经》则多处提到。如程大位就提到它，列入"元丰绍兴淳熙以来刊刻者"之倒数第二本[④]，年代是由1078～1189年，可见《钤经》应是12世纪中期的作品。又，李冶在《测圆海镜》卷七第二问第一个"法"的"草"之末，引《钤经》一段内容。为了说明问题，把该问及《钤经》解法摘录如下：

"或问丙出南门直行一百三十五步而立，甲出东门直行一十六步，见之。问：城径几何？

……《钤经》载此法，以勾弦差率幂减丙行差幂，复以丙行乘之，为实。以差率为法，如法得径。"

这里所说的城是圆形，在东、南、西、北各方中央开门。《钤经》

---

① ［宋］陈振孙. 直斋书录解题卷十四.

② 徐义保. 对《益古集》的复原与研究. 数学史研究文集第一辑. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，1990. 64～73

③ 严敦杰. 宋杨辉算书考. 宋元数学史论文集. 北京：科学出版社，1966. 149～165

④ ［明］程大位. 算法统宗. 算经源流.

的解法，用现代方式表达相当于

$$d=\frac{b_{14}\left[b_{14}^{2}-\left(c_{14}-a_{14}\right)^{2}\right]}{\left(c_{14}-a_{14}\right)^{2}}$$ ①

上述问题形式为几何，而本质上最后归结为方程求解。如果直接给出方程，则要方便得多。

第二阶段

在前人工作的基础上，平水刘汝谐终于发现了列方程的规律性，他撰写的《如积释锁》应是这方面的著作。李冶在东平“得一算经”，无疑就是这本书，其内容是“大概多明如积之术”。书中把方程系数用不同文字标明，常数项为“人”，对应的各项如下：

人	天	上	高	层	垒	汉	霄	明	仙
c	a_1x	a_2x^2	a_3x^3	a_4x^4	a_5x^5	a_6x^6	a_7x^7	a_8x^8	a_9x^9
	鬼	暗	泉	逝	落	减	低	下	地
	b_9x^{-9}	b_8x^{-8}	b_7x^{-7}	b_6x^{-6}	b_5x^{-5}	b_4x^{-4}	b_3x^{-3}	b_2x^{-2}	b_1x^{-1}

刘汝谐给出了由－9到＋9次幂各项系数的名称，现在看来显得笨拙，然而却是一次重大的突破。原文按汉文的书写为上下竖行，高次在上，低次在下。可以假定一个例子，如多项式

$$15x^{-4}+7x^{-3}-x^{-1}+8+29x-63x^{7}$$

用刘汝谐的表示法应是

⊥╫霄

·
·
·
·
·
·

=𝍣天

---

① 这个式中的符号，请参见本卷第二编第二章.

Ⅲ人（常数项）

⊦地

Ⅱ低

一‖‖减

这仅仅是方程的形式，肯定是这样形式，但是它的各项系数是如何求出来的仍不清楚。其优点是比以前仅能表示正幂项系数的“方”、“廉”（一廉、二廉、……）要方便一些，特别是能表示负幂次系数，是一次飞跃。可是如果不能求出系数，便不能表示。

方程系数的产生，无疑与“如积”有直接关系，而“释锁”则是解决问题的手段。“释锁”一词最早见于北宋贾宪的著作，杨辉在引“开方作法本源”后注称：“出释锁算书，贾宪用此术”，杨辉又引“贾宪立成释锁平方法”和“贾宪立成释锁立方法”，都是人们知道的。然而“释锁”是什么意思？观察所引内容，应是指解方程的方法，“释锁”就是把方程（像一把锁）打开（释），当然在“释”中不能缺少钥匙，而且是关键的东西。“释锁”的问题，北宋数学家已完全解决。

“如积”大概不是有固定含义的术语，可以理解成是列方程的过程。根据朱世杰《四元玉鉴》的列方程开始大都说“如积求之”，怎样“求之”没有指出，而接着给出了方程各项之系数，这样即已列出方程。看来，“如积”可能是长期使用、无需加以解释的术语。这样作的题目都是一元的，得到的方程是一元方程。其基本思路是通过“积”得到一个含未知数的等式，把这等式按同类项合并，就得到一个以次数高低排列起来的方程。排列的方式，刘汝谐给出了他自己创造的一套文字表示法。

由“如积”到列出方程，最后才是“释锁”，是一个完整的过程。由此，可初步得到这样结论：刘汝谐的《如积释锁》一书是一部代数专著，是初创天元术的代表作。

刘汝谐的时代不见记载，估计在12世纪中后期，比李文一、石信道稍晚。李冶对“如积释锁”的评价是：“其说虽若肤浅，而其理颇为易晓”，基本上合乎实际。

第三阶段

刘汝谐怎样通过“如积”得到方程至今仍是个谜，也就是说，他如何设未知量现在不清楚，但是肯定不能把19个字中的某几个同时进行“如积”，只能抛开这些文字，求出系数之后往上对应。实际上，每一项用一个文字表示也没有必要，很快就有人认识到了这一点，第一个人可能是元裕。

元裕的工作是给刘汝谐《如积释锁》作细草时简化的。根据前引李冶的记载，可知元裕在细草中只保留了“人”、“天”和“地”三个文字，其余的全部去掉不用。不过，上下的位置仍是刘汝谐那样：“天”在上，“地”在下，其形式是如下面的左式（可叫“元裕天元式”）。

元裕天元式		彭泽天元式	
⋮		⋮	
a_2x^2		b_2x^{-2}	
a_1x	（天）	b_1x^{-1}	（地）
c	（人）	c	（人）
b_1x^{-1}	（地）	a_1x	（天）
b_2x^{-2}		a_2x^2	
⋮		⋮	

元裕天元式　　彭泽天元式

元裕简化之后，有许多人仿效，如李冶所说“予遍观诸家如积图式，皆天元在上”。所谓“如积图式”就是指通过“如积”得到的方程表达式，绝不是任何别的什么。

李冶又说：“独太原彭泽彦材法，立天元在下。凡今之印本

《复轨》等书，俱下置天元者，悉踵习彦材法耳。彦材在数学中，亦入域之贤也。而立法与古相反者，其意以为天本在上，……”这位彭泽把“天”、“地”上下调了位置，可叫它为“彭泽天元式”。据“立法与古相反者”这句话，估计彭泽与元裕之间有一段较长的时间间隔，恐怕至少也有四五十年。元裕比刘汝谐稍晚，约在12世纪后期，如1180年前后，而彭泽当在13世纪初前期。

清罗士琳（1774～1853）给《四元玉鉴》作细草时把“绛人元裕细草之”修改为“绛人元裕之细草”，其理由是“元好问字裕之，绛人旧本绛误作锋，又错简之字在细草下，今更正。”把“锋”字改为“绛”字是对的，当时没有锋县，而把元裕改为元裕之则没有根据。元好问（1190～1257）字裕之，与李冶同时代，且是好朋友，若是元好问作细草，李冶应当指明，但李冶并未提到他。特别是元裕在彭泽之前几十年，而彭泽又在李冶之前，因为“彭泽天元式”又为别人所采用，出版了《复轨》等书，也不是很短的时间，估计也有十年八年。因而，元裕不是元裕之，在元裕给《如积释锁》作细草时，元裕之尚未出生或刚出生。

在《元史》上有很多地方把元裕之误为元裕，那个元裕是元好问，而不是作细草的数学家元裕。

彭泽有一点资料。耶律楚材在一首诗中有“丁年彭泽解官去，邀游三径真三友。悠然把菊见南山，畅饮东篱醉重九”[①]之句。这首诗作于1231年，此时彭泽是壮年时期，“解官去”可能是指他原来在金朝做地方官。此时金尚未亡，但北方为蒙古军所占，而耶律楚材系随成吉思汗征金，往返于太原、解州、陕西等地，符合太原彭泽的地理位置，所以这位彭泽无疑即是改变“天”在下而“地”在上的彭泽。他这种改变天元术的工作，估计就在解官

① ［元］耶律楚材．湛然居士文集卷一“和黄华老人题献陵吴氏成趣园诗”．北京：中华书局，1986．1

前后。这样，彭泽字彦材，太原人，生活于13世纪前期，年龄与李冶差不多，即生于12世纪末。

“元裕天元式”和“彭泽天元式”虽较前人的表达有了很大进步，但同时用“天”和“地”两个文字表示仍无必要，还有改进的余地。李冶做了这一步工作。

李冶在天元术方面进行了两点改进：第一，只要天元，在一次项系数旁改写一个“元”字，在叙述上则说“立天元一为某某”，把常数项旁的“人”字改为“太”字，他说：“亦犹易卦，乾在在下，坤在在上，二气相交而为太也。”这可能是他用“太”而不用“人”的原因。实际上，他还有一项简化，就是在一个天元式中用“元”不用“太”，或用“太”而不用“元”。详细情况，将在本卷第二编讨论。

天元术到李冶时已经达到成熟的地步了。

第四阶段

一元的天元术发展到李冶的时候，不论是“元”和“太”上下位置怎样摆法，都已达到了尽头。多于一元的情况李冶没有考虑，在他之后便不断出现了，这就是祖颐讲到的李德载和刘大鉴的工作。李德载在著作中“兼有地元”，清楚地说明他是在已有天元的情况下增加了地元，即由一元推广到了二元。

刘大鉴的工作是在书末“仅有人元二问”，说的不够明确，以理推之，应是在天元、地元二元之外增加了人元，是指三元的问题有“二问”，否则为一元或二元，在这里举出便无必要，特别是仅用人元和仅用天元的情况，与李冶的处理完全一样。如果是二元，在叙述中，祖颐不能用这种口气。

祖颐不是数学家，可是他对前人的工作比较了解，尤其是讲到了书的内容和刘大鉴的亲属关系，说明他和该二人相去不远。因祖颐的话是说于1303年，故李德载和刘大鉴的时代应介于李冶完善天元术之后到1303年之间，定在13世纪后期是妥当的。

朱世杰在13、14世纪之交把天元术推广到了四元术，就四元图的排列来看，已经达到了不能再推广的地步。关于四元术的详细情况，请见本卷第四编第二章。

天元术的形成和发展到14世纪初已经全部完成。这是一套半符号式代数，它走完了自己光辉的历程。

为了使天元术发展历史的脉络比较清晰，下面列出一表（表1.3.1）供读者参考。

表1.3.1　天元术发展年代表

作　者	年　代	作者所在地		作　　品
		籍贯	现在地点	
王孝通	7世纪			缉古算经
刘　益	1020?	中山①	河北定县	议古根源
贾　宪	1060?			释锁、黄帝九章细草
蒋　周	1080?	平阳	山西临汾	益古集
李文一	11、12世纪	博陆	河北蠡县?	照胆
石信道	1150?	鹿泉	河北获鹿?	钤经
刘汝谐	1170?	平水	山西临汾	如积释锁
元　裕	1190?	绛	山西绛县	如积释锁细草
?	1200?			复轨
彭　泽	1230?	太原	山西太原市	
李　冶	1248 1259	栾城	河北栾城市	测圆海镜 益古演段
李德载	13世纪后期	平阳	山西临汾	两仪群英集臻
刘大鉴	13世纪后期	霍山②	山西霍县?	乾坤括囊
朱世杰	1303	燕	北京一带	四元玉鉴

① “中山”之名是后来才有的.

② “霍山”可能是元代之霍邑.

表1.3.1中所填之年代有的很确切，多数的不太确切，少数的可能有较大出入，都打上了“?”号以示区别。但是前后次序一般不会有大问题。从作者所在地来看，都是今山西、河北，尤其是从太原到临汾一带形成了天元术研究中心，前后百年左右，在这方面做出了重大贡献。

第二节 以刘秉忠为代表的一个河北知识群体

天元术的形成和发展的历史是一个很细的单线的马拉松式的过程，如果从预备阶段起算，那就长达600年以上。在最后是冲刺性的发展，而且呈现着加速现象，越来越快。这个过程的后期，似乎有一个或两个小的数学家群体。例如从刘汝谐到彭泽只有半个多世纪，出版有关天元术的书很多，如李冶所说“遍观诸家如积图式”和“《复轨》等书”，都是指一些书，而不是一两本。与这种情况不同的是在河北有一个知识群体，研究和学习数学、水利、天文历法等自然科学，存在的时间很短，大约只有20年。他们是以刘秉忠为代表的，包括张文谦、郭守敬、王恂，可能还有张易。这批知识分子都先后到忽必烈处工作，对元初的科学发展起了重大作用。

刘秉忠（1216～1274），字仲晦，顺德邢台（今河北邢台市）人。他自幼勤奋好学，至老不衰，通晓音律，精算数，善推步，仰观占候，六壬遁甲、易经象数、邵氏皇极之书，靡不周知①。可以说是个知识渊博的学者。原来他家“奕世衣冠”，到刘秉忠时已经破落，家贫。为了养亲，17岁时在邢台节度使府当令史小官吏。此时金朝已临灭亡，而刘秉忠对此小吏也看不进眼。他说：“今乃汩

① ［元］苏天爵．元朝名臣事略卷七“太保刘文正公［秉忠］”．

没为刀笔吏乎！丈夫不遇于世，当隐居以求志耳。”于是弃去小吏，“隐武安山中”①。武安是县名，即今河北武安县，境内有一座小山，叫紫金山，刘秉忠即在该山隐居求志，等待时机。他隐居的时间，约在 1233 年。到 1243 年左右，他离开那里，出家当了和尚，又游云中（今山西大同市），留居南堂寺。不久，被人介绍于忽必烈（时尚未登汗位），“既入见，应对称旨，屡称顾问”，他“论天下事如指诸掌”，因而受到忽必烈的器重，被留在“藩邸”②，不过他仍着僧装，不为官。虽然如此，刘秉忠还是经常回到紫金山，那里有几位年轻人学习，需要指导。他曾建议忽必烈改革历法，给他太保头衔，参领中书省事。

张文谦（1216～1283），字仲谦，邢台沙河（今河北沙河县北）人，与刘秉忠同庚，居处相距不远。他“幼聪敏，读书善记诵，自入小学，与太保刘公同研席，年相若，志相得”③。张文谦从小与刘秉忠同学，很可能是在他们家乡，而不是在紫金山。刘秉忠向忽必烈推荐了张文谦，“岁丁未（1247 年）驿召北上，入见，召对称旨，擢置持从之列”，受到重用。中统元年（1261 年）被任命为中书省左丞，至元七年（1270 年）拜大司农卿，奏请“立诸道劝农司，巡行劝课，请开田籍，行祭先农先蚕等礼。”又与“窦默请立国子学”④，后来领导历法改革，升至很高的官位。

郭守敬（1231～1316），字若思，顺德邢台（今河北邢台市）人，与刘秉忠为同乡，但却是晚辈，比刘秉忠小 15 岁。有趣的是，他们之间的关系比较密切，这是由于郭守敬的祖父郭荣起了作用。

郭荣“通五经，精于算数、水利”⑤，王恽（1227～1304）有

① 《元史》卷一百五十七“刘秉忠传”.

② 《元史》卷一百五十七“刘秉忠传”.

③ [元] 苏天爵. 元朝名臣事略卷七“左丞张忠宣公 [文谦]”.

④ 《元史》卷一百五十七“张文谦传”.

⑤ [元] 齐履谦. 知太史院事郭公行状，载 [元] 苏天爵. 元朝名臣事略卷五十.

一首“题郭都水若思祖行实卷后，公善推步算数，隐德君子也[邢台]”诗，诗云：

天元章会到玄机，星历推来一理齐。

襄用至今传异事，门前鸳水亦曾西。

龙岗拱木秋风老，燕处犹怀隐德尊。

皇极不埋身后数，青云今见起家孙①。

这条资料中明确指出了郭守敬的祖父“善推步算数”，至少是一位精通数学、天文学的知识分子，虽然他本人只是“隐德君子”，没有什么学术成果公诸于世，但是却有一位好孙子②。其中是对“行实卷”进行题诗，大约是关于郭荣的活动的画卷，是谁画的不清楚，也许是郭守敬自己画的，表示对祖父的怀念和纪念。郭守敬与王恽是很要好的朋友③，而王又是当时著名学者，请他题诗是很自然的事。郭荣号“鸳水翁”，以前不知是怎么来的，诗中的“门前鸳水亦曾西”则道出了是其家门前有一条叫鸳水的小河的缘故。

郭守敬“生有异操，不为嬉戏事”，又有祖父的教育，从小即有知识。郭荣还希望孙子受到更好的教育，而他又与刘秉忠为“同志友”，于是便把孙子送到紫金山，交给刘秉忠培养。这时郭守敬大概是 18 岁左右。在刘秉忠指导下，郭守敬进步很快，成为一位有真才实学的青年学者。早在他十五六岁时就对莲花漏有所研究，20 岁时又修复了家乡被埋没多年的石桥，元好问“文其事于石”④。中统元年（1260 年），张文谦被派往大名（今河北大名）等路行宣抚司事，郭守敬也随之前往，并在那里“大为鼓铸，即今灵台所用铜壶，又得尚书璇玑图，规竹蔑为仪，积土为台，以

① ［元］王恽．秋涧先生大全文集卷二十八．

② 郭荣是郭守敬祖父还是父亲，人们有不同看法．王恽的题诗完全证实了他们是祖孙关系．

③ 李迪．论元代王恽的科学工作．未刊稿．

④ ［元］齐履谦．知太史院事郭公行状．载［元］苏天爵．元朝名臣事略卷五十．

望二十八宿及诸大星。"[1] 可能就在此年或稍后，由郭守敬铸成宝山漏一座，于中统三年（1262 年）二月运到燕京[2]。张文谦即在同年以郭守敬"习知水利，且巧思绝人"，推荐给忽必烈。郭守敬被召见到上都，面陈水利六事，立即任命他为提举诸路河渠[3]，以后直到至元十二年（1275 年），他主要从事水利工作，任都水少监、都水监、工部郎中等职。曾去西夏考察以前的水利设施，考察黄河通航情况等，并修复了许多渠道，颇有成绩。至元十三年（1276 年），他被调去领导改历工作。成为中国历史上伟大科学家之一。

王恂（1235～1281），字敬甫，中山安喜[4]（今河北定县）人。其父王良（1190～1281），金末时为中山府掾，当时政治腐败和变乱，百姓遭殃，可能是因看不惯此种社会现象，于是"弃去吏业，潜心伊洛之学，及天文律历，无不精究"[5]，可以说是一位精通自然科学的知识分子。王恂在家庭受到父亲很好的教育，母亲也有点文化，对他进行帮助。文献上说他 3 岁就能认识"风"、"丁"二字，6 岁就学，13 岁学九数（一说性理数术），辄造其极。

岁己酉（1249 年），刘秉忠自邢台北上，取道中山，"方求一时之俊"，便把王恂找来交谈，发现他是一个有才华的青年（这时王恂 17 岁），"欲为大就之"。刘秉忠从忽必烈处回来时就把王恂带到紫金山，亲自进行培养。王恂充分地利用了这个难得的学习机会，"振迅奋厉，所业大进"[6]，成为一名高水平的数学家。岁癸丑（1253 年），刘秉忠把王恂以算术名家推荐给忽必烈，召见于六

---

① ［元］齐履谦. 知太史院事郭公行状. 载［元］苏天爵. 元朝名臣事略卷五十.

② 《元史》卷五"世祖本纪二".

③ ［元］齐履谦. 知太史院事郭公行状. 载［元］苏天爵. 元朝名臣事略卷五十.

④ 关于王恂的籍贯，还有一说为中山唐县，见《元史》王恂传. 此处采《元朝名臣事略》卷九之说. 安喜与唐县都归中山府，两县相邻.

⑤ 《元史》卷一百六十四"王恂传".

⑥ ［元］苏天爵. 元朝名臣事略卷九"太史王文肃公".

盘山，命辅导裕宗（忽必烈的儿子，名真金），为太子伴读。中统二年（1261 年），升为太子赞善，三年（1262 年）裕宗被封为燕王，王恂守中书令，兼判枢密院事。直到至元十三年（1276 年）另有任用，才离开裕宗。裕宗曾问王恂算术有何用处，他答曰："算术，六艺之一耳；定国家，安人民，乃大事也。"[①] 此话反映了王恂对数学的一种看法，认为它有大用处，后来果然派上了大用场。

王恂在当时已是数学名家，他"以算术妙天下"，"以算术冠一时"[②]，被公认为是当代最有水平的数学家，在中国历史上极为罕见。他掌握了哪些数学内容，没有留下记载，结合他后来的工作可知，当时流行的天元术、差分法和插值法等是他的重要研究对象和使用工具。他的家乡处于天元术研究活跃地带，肯定受到直接影响。

至元十三年他被调去领导历法改革，至元十七年（1280 年）完成。第二年，由于父亲、继母亲、哥哥、弟弟、侄子接连去世，自己也悲痛而死。他有两个儿子：王宽、王宾，都受教于许衡，又"得星历之传于家学"，他们最初都在太史院任职，从事天文学研究工作，后来分别升到较高官位[③]。

张易，字仲一，忻州（今山西忻县）人[④]。家世不详，至元三年（1266 年）以中书右丞同知制国用使司事[⑤]，可见他较早的到了忽必烈处。后为枢密副使，十三年（1276 年）又兼知秘书监[⑥]。十

---

① ［元］苏天爵. 元朝名臣事略卷九"太史王文肃公".

② ［元］苏天爵. 元朝名臣事略卷九"太史王文肃公".

③ 《元史》卷一百六十四"王恂传"；［元］苏天爵. 元朝名臣事略卷九"太史王文肃公".

④ ［元］王士点，商企翁. 元秘书监志卷九"题名".

⑤ 《元史》卷六、卷九、卷十二.

⑥ ［元］王士点，商企翁. 元秘书监志卷九"题名".

九年（1282 年）张易因与王著等合谋杀了阿合马，被诛于市[1]。至元十三年，他曾是改历的最高领导人。

在上述资料中，看不出张易和刘秉忠的关系，而且又不是河北人。可是在一些文献中却说他与刘秉忠等同学于紫金山，如齐履谦在讲郭守敬时说："时太保刘文贞公（秉忠）、左丞张忠宣公（文谦）、枢密张公易、赞善王公恂，同学于州西紫金山"，又加进了郭守敬。这批人不是同时代的，郭守敬、王恂比刘秉忠、张文谦小 15 岁、19 岁，张易的生年不见记载，从其官职看，应和刘秉忠、张文谦差不多，如果是同学也只能是郭守敬、王恂去紫金山之前。王恂到紫金山时，张文谦已在两年前到了忽必烈处，郭守敬与王恂应是紫金山同学，张易在紫金山是否与他们见过面，都很难说。张易与刘秉忠的关系仍然是个谜，暂作早期存在关系处理。后来确实是在忽必烈处汇合了，到改历时，倡议者刘秉忠却先期去世，在世的 4 人成了改历的领导人和学术骨干。

王恂可能是到紫金山学习的最后一人。刘秉忠本人没有留下什么科学成果，可是他培养的郭守敬、王恂却是杰出科学家，取得了称誉世界的成就，刘秉忠的功绩也不可没。

---

① 《元史》卷六、卷九、卷十二.

第 二 编

李冶的数学成就

李冶是13世纪，也是中国历史上著名数学家之一，他留下《测圆海镜》和《益古演段》两部数学著作，特别是《测圆海镜》一书受到人们普遍的重视和称赞。本编将对李冶的生平和他的两部著作进行较详细地讨论。

第一章 李冶生平及学术思想

第一节 李冶生平

李冶是金元之际的著名数学家，字仁卿，号敬斋，真定府栾城（今河北栾城）人。

金明昌三年（1192年），李冶生于大兴（今北京）。他的父亲李遹（yú）是位博学多才的学者，曾在大兴府尹胡沙虎手下任推官，母亲姓王。李冶有两个同父异母的弟兄，兄名澈，刘氏所生；弟名滋，崔氏所生；还有两个同胞姐妹。李冶原名治，后改为冶。改名的原因，大概是为了避免与唐高宗同名。

李冶出生的时候，金朝正由盛而衰。章宗即位（1190年）后，官僚政治日趋腐败。由于管理不善，酿成了连续三次的黄河大决堤，大片耕地被淹，沿河农村受到严重破坏。再加上对外战争及

女真贵族的任意挥霍，金朝出现了财政危机，于是滥发纸币，致使物价飞涨，国虚民穷。泰和八年（1208 年），金章宗病死，卫绍王允济即皇帝位。蒙古军队加紧向金朝进攻，腐朽的金朝内已潜伏着亡国的危机。

李遹的上司胡沙虎是一个深得朝廷宠信的奸臣，他“声势炎炎，人莫敢仰视”，动辄打骂同僚，欺压百姓，甚至“虐杀不辜”。李遹见他无恶不作，常常据理力争，置个人生死祸福于度外。为了防备不测，李遹把老小送回故乡栾城。这时李冶正是少年，他没有随家人回乡而独自到栾城的邻县元氏求学去了。他不仅天资明敏，而且喜爱读书。《元朝名臣事略》中说：“公（指李冶）幼读书，手不释卷，性颖悟，有成人之风。”至宁元年（1213 年），由于胡沙虎篡权乱政，李遹被迫辞职，隐居阳翟（今河南禹县）。他从此不再过问政事，时常吟诗作画，善画山水龙虎，在当地颇有名声。

父亲的正直为人及好学精神对李冶深有影响。在李冶看来，学问比财富更可贵，他说：“积财千万，不如薄技在身。”又说：“金璧虽重宝，费用难贮蓄。学问藏之身，身在即有余。”[①] 他在青少年时期，对文学、史学、数学、经学都感兴趣，曾与好友元好问外出求学，拜文学家赵秉文、杨云翼为师，受益匪浅。杨云翼不仅精于词赋，而且通历算，曾参与历法修订工作，并著有《勾股机要》、《象数杂说》等算书，前已述及。

正大七年（1230 年），李冶赴洛阳应试，被录取为词赋科进士，时人称赞他“经为通儒，文为名家”。同年得高陵（今陕西高陵）主簿官职，但蒙古窝阔台军已攻入陕西，所以没有上任。接着又被调往阳翟附近的钧州（今河南禹县）任知事。这时，金朝在蒙古军队的威胁之下，形势非常紧张，钧州城内调度十分频繁。李

① 李冶．敬斋古今黈．《丛书集成初编》本．1935．63～64

冶和他父亲一样，为官清廉、正直。他亲自掌管出纳，一丝不苟。开兴元年（1232 年）正月，蒙古军队攻破钧州。李冶不愿投降，只好换上平民服装，北渡黄河避难，走上了漫长而艰苦的流亡之路。这是他一生的重要转折点，将近 50 年的学术生涯便由此开始了。

李冶北渡后流落于山西的忻县、崞县之间，过着“饥寒不能自存”的生活。1234 年初，金朝为蒙古所灭。李冶感到政事已无可为，于是潜心学问。他经过一段时间的颠沛流离之后，定居于崞县的桐川。这时，他已年过 40 岁了。金朝的灭亡给李冶生活带来不幸，但由于他不再为官，这在客观上也使他的科学研究有了充裕的时间。他在桐川的研究工作是多方面的，涉及数学、文学、历史、天文、哲学、医学。与李冶同时代的砚坚说他“世间书凡所经见，靡不洞究，至于薄物细故，亦不遗焉。”[①]《元史新编》中也说他“凡天文象数，名物之学，无不研精。”李冶不仅博览群书，而且善于去粗取精，批判地接受前人知识。他说：“学有三，积之之多不若取之之精，取之之精不若得之之深。”[②] 他在实践中逐渐认识到数学的重要性，于是把主要精力用于数学。他深入研究了洞渊[③] 的一部专讲勾股容圆问题的算书，讨论了在各种条件下用天元术求圆径的问题，于 1248 年写成代数名著——《测圆海镜》十二卷，这是他一生的最大成就。

后来，李冶到太原住了一段时期，藩府官员曾请他出仕，但他谢绝了。又流落到平定，平定侯聂珪很尊重他，把他接到自己的帅府来住，可能还给了他一些资助。但他却深深怀念着少年求学时的元氏。1251 年，李冶的经济情况已经好转，他终于结束了

---

① 李冶．益古演段．《丛书集成初编》本，砚坚序．1936

② 李冶等．敬斋古今黈附录．载《藕香零拾丛书》（32），1895．3

③ 据李迪考证，洞渊为北宋处州（今浙江丽水县）的洞渊大师李思聪，见《十三世纪我国数学家李冶》，载《数学通报》1979 年第 3 期．

在山西的避难生活，回元氏定居。他在封龙山下买了一点田产，以维持生活，并开始收徒讲学。

李冶一生不求闻达，但却努力著述，乐于教人。他的学生越来越多，不久便增至数十人，家里逐渐容纳不下了。于是师生共同努力，在北宋李昉读书堂故基上建起封龙书院。李冶在书院不仅讲数学，也讲文学和其他知识。他呕心沥血，培养出大批人才，并常在工作之余与元好问、张德辉一起游封龙山，被称为“龙山三老”。1257 年，忽必烈召见金朝遗老窦默、姚枢、李俊民等多人，又派董文用专程去请李冶。是年五月，李冶在开平（今内蒙古正蓝旗）见忽必烈，陈述了自己的政治见解。

忽必烈问李冶：“天下当如何而治？”李冶回答说：“夫治天下，难则难于登天，易则易于反掌。盖有法度则治，控名责实则治，进君子退小人则治。如是而治天下，岂不易于反掌乎？无法度则乱，有名无实则乱，进小人退君子则乱，如是而治天下，岂不难于登天乎？”他强调说：“为治之道，不过立法度、正纪纲而已。纪纲者，上下相维持；法度者，赏罚示惩劝。”在谈到人才问题时，李冶说：“天下未尝乏材，求则得之，舍则失之，理势然耳。”他举荐了魏璠、王鹗、李献卿、郝经、王博文等，说这些儒生“皆可用之材”。又说：“夫四海之内曷止此数子哉？诚能广延于外，将见云集辐凑于朝廷矣。”忽必烈问回鹘（即回纥）之人可用否？李冶答道：“汉人中有君子小人，回鹘人亦有君子小人……，在国家择而用之耳。”看来，李冶是主张任人唯贤，反对种族偏见的。

在和忽必烈谈话中，李冶极力推崇唐朝的魏征，说：“征忠言谠[1] 论，知无不言，实为唐朝名臣第一”，又说：“今之人侧媚成风，欲比魏征实多愧矣。”李冶认为，要重用魏征这样“知无不言”的君子，才能把国家治理好。

---

① 谠，dǎng，正直.

最后，忽必烈向李冶询问地震原因，李冶答道："天裂为阳不足，地动为阴有余。地道，阴也，阴太盛则变常矣。今之震动，或奸邪在侧，或女谒[1] 盛行，或谗慝[2] 弘多，或刑罚失中，或征伐骤举，五者必有一于此矣。"接着，他向忽必烈提出劝告："然天之爱君如爱其子，故出此以警之。苟能辨奸邪、去女谒、屏谗慝、减刑罚、止征伐，上当天心，下合人意，则可变咎证为休征矣。"由于时代的局限，李冶对地震原因的解释不够科学，其中反映出的天人感应思想也是错误的。但他借此机会向忽必烈提出的五条建议，却有着进步的政治意义，不失为当时的治国良策[3]。

对于李冶的议论，忽必烈表示了赞赏。从他即位后的用人来看，李冶的意见还是对他有一定影响的，因为李冶推荐的儒生中，确有一些人为忽必烈所用（如王鹗、郝经）。

李冶见忽必烈之后，回封龙山继续讲学著书，于 1259 年写成另一部天元术著作——《益古演段》三卷。如果说《测圆海镜》是为数学家写的，那么《益古演段》就可能是为他的学生写的。李冶深刻认识到天元术的重要性，但《测圆海镜》比较深奥，粗知数学的人看不懂。于是他便在教学的同时，着手写一部普及天元术的著作。李冶曾读过北宋数学家蒋周的《益古集》，内容多是与平面图形有关的二次方程，列方程方法也是几何的。李冶用天元术对此书进行研究，于是有《益古演段》之作。李冶在序言中说："使粗知十百者，便得入室啖其文，顾不快哉！"这便清楚地说明了他的写作目的，即让稍有数学知识的人看懂此书，掌握天元术要领。

---

① 女谒，指通过在宫廷受宠的女子进行请托.

② 慝，tè，邪恶.

③ 上述李冶与忽必烈的对话，参见宋濂《元史》. 北京：中华书局，1976. 3 759～3 761

1260年，忽必烈即皇帝位，是为元世祖。第二年七月建翰林国史院于开平，聘请李冶担任清高而显要的工作——翰林学士知制诰同修国史。李冶却以老病为辞，婉言谢绝了。从时代背景及李冶思想分析，他拒绝应聘的原因有二。第一，蒙古统治者没有接受李冶“止征伐”的建议，而是大举攻宋，从而引起李冶不满；第二，忽必烈初登帝位，其弟阿里不哥不服，起兵反抗，蒙古统治区陷入连年内战。李冶是不愿在这种动荡的局势下作官的。他说：“世道相违，则君子隐而不仕。”① 又说：“盖有大智不得大用，故羞耻不出，宁与市人木石为伍也。”②

李冶选择隐居的道路虽属不得已，但他对自己的选择还是很满意的。他说：“君子之道，或出或处，然则必有道而不肯以轻出者，谓之处士可也。”③ 又说：“身有其德而退藏于密，始得谓之隐者也。彼无一德之可取，而徒穷蹙于寒乡冻谷之中，是则素隐者耳。”④ 在李冶看来，真正的处士或隐士，也是君子，他以自己能成为这样的君子而自豪。他的隐居并非消极避世，而是积极投入学术活动。

忽必烈降服阿里不哥、平定蒙古内乱后，再召李冶为翰林学士知制诰同修国史。李冶于至元二年（1265年）来到燕京（今北京），勉强就职，从事为皇帝起草诏令及编写历史的工作。但他不久便感到翰林院里思想不自由，处处都要秉承统治者的意旨而不能畅所欲言。因此，他在这里工作一年之后便以老病辞职了。他在辞职时致书翰林院，说“翰林非病叟所处，宠禄非庸夫所食。”其实，这不过是他的婉言推托之词。李冶接着说：“官谤可畏也。”⑤

---

① 李冶. 敬斋古今黈.《丛书集成初编》本. 1935. 16

② 李冶. 敬斋古今黈.《丛书集成初编》本. 1935. 16，23

③ 李冶. 敬斋古今黈.《丛书集成初编》本. 1935. 23

④ 李冶. 敬斋古今黈.《丛书集成初编》本. 1935. 23. 160

⑤ 曾廉，元书，卷九十一. 层漪堂刊本. 1911. 5

这五个字才道出了他辞职的真实动机。李冶是个追求思想自由的人，尤其不愿在学术上唯命是从。在《泛说》中，他把自己当时的思想写得更为具体："翰林视草，唯天子命之；史馆秉笔，以宰相监之。特书佐之流，有司之事，非作者所敢自专而非非是是也。今者犹以翰林、史馆为高选，是工谀誉而善缘饰者为高选也。吾恐识者羞之。"①

李冶辞职后一直在封龙山下讲学著书。他的兴趣广泛，博古通今，又能循循善诱，因此深受学生欢迎，不少人远道而来，以亲耳聆听李冶教诲为快事。王德渊称赞他"于六艺百家，靡不串贯"②。他在晚年整理了自己多年的笔记，写成两部内容丰富的著作——《泛说》与《敬斋古今黈（tǒu）》。《泛说》一书今已不存，据《元朝名臣事略》中的几段引文及书名来看，这是一本随感录，记录李冶对各种事物的见解。《敬斋古今黈》则是一本读书笔记，"上下千古，博及群书"，"以考证佐其议论"，在文史方面颇有独到见解。另外，李冶作过不少诗词，有五首诗保存在《元诗选癸集》中，五首词保存在《全金元词》中。从这些诗词来看，李冶的文学造诣相当深。他还著有《文集》、《壁书丛削》等，都已经失传。

至元十六年（1279年），李冶病逝于元氏，享年87岁。后人盖棺定论，对李冶有公正的评价："金亡北渡，讲学著书，秘演算术，独能以道德、文章，确然自守，至老不衰。"③ 在中国科学史上，李冶确实不愧为一代楷模。他以自己优良的人品和卓越的学术成就被人们深深怀念着。

---

① 李冶等. 敬斋古今黈附录. 载《藕香零拾丛书》(32). 1895. 3

② 李冶. 测圆海镜细草.《知不足斋丛书》本. 后序. 1798

③ 李冶等. 敬斋古今黈附录. 载《藕香零拾丛书》(32). 1895. 5

第二节　李冶的学术思想

一、崇尚自然

李冶在北渡之前是尊儒的，尤其推崇孔子的“仁义”之说。但在隐居桐川后，他的思想便越来越倾向于道家了。

道家是春秋战国时代由老子和庄子创立的一个哲学流派，其思想核心是“道”。庄子说：“天地者，形之大者也；阴阳者，气之大者也，道者为之公。”这就是说，道是天地阴阳之间的共同的东西。他又说：“道者，万物之所由也，庶物失之者死，得之者生，为事逆之则败，顺之则成。”[①]很明显，庄子所谓“道”，大体相当于我们所说的“自然规律”。道家崇尚自然，这无疑是有利于把人们的眼光引向自然科学的。老、庄的学说甚至成为李冶抵制程、朱理学的思想武器。

宋朝时，程、朱理学颇有影响。他们认为，“理”是至高无上的，“未有物，而已有物之理。”他们的主要思想是重伦理、轻实事，而伦理观的核心则是三纲五常。理学家们轻视科学技术，认为历算、医学等“皆技也”，“故前圣不以为教，盖吝之也。”[②]朱熹曾说过，唐朝孙思邈是一个好学深思的人，只因为行医，所以未成大器，十分可惜。在理学家心目中，连一向受人尊重的文史都不足贵，有人花些时间去钻研诗词，程颢便讽之为“玩物丧志”。至于数学，当然更不在话下了。理学家李焘公开反对国家设立算学馆（相当于国立大学数学系），说：“将来建学之后，养士设科，

---

① 陈鼓应. 庄子今注今译. 北京：中华书局，1988. 824

② （宋）欧阳修，宋祁. 新唐书. 北京：中华书局，1975. 5 797

徒有烦费，实于国事无补。”[①]1235 年，蒙古统治者从南宋得程、朱之书，1238 年建太极书院于燕京，请理学家赵复讲学，理学逐渐在北方流传开来，朱熹也被尊为朱子。许多士大夫受理学影响，轻视数学，称之为九九贱技，认为它无补仕途。李冶进行数学研究时，也曾受到一些人的嘲笑。但李冶对朱熹的学说却不迷信，他说：“大抵晦庵（朱熹）之论佳处极多，然窒碍处亦不可以毛举也，学者正当反复与夺之。”[②] 他在驳斥那种视数学为九九贱技的观点时说：“由技兼于事者言之，夷之礼，夔之乐，亦不免为一技；由技进乎道者言之，石之斤，扁之轮，非圣人之所与乎？”[③] 这就是说，从技艺用于实际来说，圣人所作的礼和乐也可看作一种技艺；从技艺中包含自然规律（即“道”）来说，工匠使用的工具也是圣人所赞赏的。如果我们把李冶的话同庄子所说的“道之所在，圣人尊之”联系起来，李冶受庄子思想的影响是一目了然的。显然，他认为数学这种技艺也能体现道，也应受到尊重。他充分认识到数学的用处，说“数术虽居六艺之末，而施之人事，则最为切务。”[④]这便是他坚持数学研究的指导思想。李冶这种“技兼于事”的观点，可能直接取自《庄子》，该书明确指出：“上治人者事也，能有所艺者技也，技兼于事。”[⑤]

那么，应该如何研究数学呢？李冶认为，只知道下功夫、钻书本还不行，必须要合于自然。他深有体会地说：“数本难穷，吾

---

① （宋）李焘．续资治通鉴长编．浙江书局，1881．26

② 李冶．敬斋古今黈．《丛书集成初编》本．1935．166

③ 李冶．测圆海镜序，见《测圆海镜细草》，《知不足斋丛书》本，1798．夷，黄帝臣名；夔，kuí，舜臣名．石，扁，均为古工匠名．

④ 李冶．益古演段序．《丛书集成初编》本．1936．天艺即礼、乐、射、御、书、数，是周代学校的教育内容．

⑤ （周）庄周．庄子．（明）世德堂刊本．1～2

欲以力强穷之，彼其数不惟不能得其凡，而吾之力且惫矣。”[①] 他知道数学是奥妙无穷的，但认为人类可以认识它。李冶说：“谓数为难穷，斯可；谓数为不可穷，斯不可。何则？彼其冥冥之中，固有昭昭者存。夫昭昭者，其自然之数也。非自然之数，其自然之理也。”[②] 这就是说，昏暗之中存在着明显的规律。所谓明显的规律，便是源于自然的数及自然中蕴含的理。李冶的这一思想，也可以从老、庄学说中找到渊源。庄子在《知北游》中就说过：“夫昭昭生于冥冥，有伦生于无形。”[③] 老子说：“人法地，地法天，天法道，道法自然。”[④] 又说：“道之尊，德之贵，夫莫之命而常自然。”[⑤] 正是由于对自然的深刻理解，李冶进一步指出：“数一出于自然，吾欲以力强穷之，使隶首复生，亦末如之何也已。”[⑥] 这就是说，数既出于自然，若不顾自然，只凭主观努力去探究数学，即使隶首（传说中发明数学的人）复生，也不会有好的办法。他认为“苟能推自然之理，以明自然之数，则虽远而乾端坤倪，幽而神情鬼状，未有不合者矣。”[⑦] 意思是：只要遵循自然中蕴含的理去认识源于自然的数，便可得到放之四海而皆准的数学理论。这里的“神情鬼状”并非宗教性鬼神，只不过是“深奥难测”的一个代名词。“乾端坤倪”与“神情鬼状”并提，前者极言数学应用之广，后者极言数学应用之深。李冶既重视数学研究，又对数学

---

① 李冶．测圆海镜序．

② 李冶．测圆海镜序．

③ 陈鼓应．庄子今注今译．北京：中华书局，1988．569

④ 中国社会科学院哲学研究所中国哲学史研究室．中国哲学史资料选辑·先秦之部·老子．北京：中华书局，1984．619

⑤ 中国社会科学院哲学研究所中国哲学史研究室．中国哲学史资料选辑·先秦之部·老子．北京：中华书局，1984．642

⑥ 李冶．测圆海镜序．

⑦ 李冶．测圆海镜序．

有这些正确的认识，这是他在数学上取得杰出成就的重要原因。

李冶不仅继承和应用了老、庄的思想，在某些方面还有发展。老、庄虽然认识到世界万物是不断变化的，却忽视了相对静止。如庄子说："物有死生，不恃其成，……物之生也，若骤若驰，无动而不变，无时而不移。"[①] 李冶则进一步认识到："静生于动，而复归于动，则所谓静者，特须臾之静耳。"[②] 这就是说，运动是绝对的，静止是相对的。这在当时是一种很先进的哲学思想，不过他没有把动的观点用于数学研究。

二、执着追求

李冶一生热爱科学，执着追求，敢于突破传统观念的束缚。当他认定测圆术为研究方向后，便专攻数学，这种行动本身就是对传统儒学的批判，因为在儒家看来，数学"可以兼明，不可以专业。"[③] 李冶走过了一条从通儒到数学专家的道路。他几十年如一日，孜孜不倦，锲而不舍，在动荡而苦难的环境中顽强奋斗。在当时社会上，很少人能理解李冶工作的价值，甚至当他的代表作《测圆海镜》完成之后，仍然没有引起人们重视。对这一点，李冶是早就料到的，他在《测圆海镜》序中说："览吾之编，察吾苦心，其悯我者当百数，其笑我者当千数。"但他接着又说："乃若吾之所得则自得焉耳，宁复为人悯笑计哉！"表现了他坚持真理、不屈不挠的精神。实际上，《测圆海镜》一书直到李冶死后才得以出版。

李冶对自己的数学工作，尤其是《测圆海镜》的重要性有清楚的认识。他生前虽有不少文史著作，但在弥留之际对儿子克修说："吾平生著述，死后可尽燔去，独《测圆海镜》一书，虽九九

---

① 陈鼓应. 庄子今注今译. 北京：中华书局，1988. 425

② 李冶. 敬斋古今黈.《丛书集成初编》本. 1935. 79

③（北齐）颜之推. 颜氏家训·卷下. 子书百家本. 26

小数，吾常精思致力焉，后世必有知者，庶可布广垂永乎？”[1] 可见他把自己的数学工作看得高于一切。

三、独立思考

李冶善于独立思考，决不迷信名家或盲从古人。在《敬斋古今黈》中，他发表了不少对前人诗文的评论，或褒或贬，直抒己见。对先秦以来的诸大家，如荀况、司马相如、苏东坡、朱熹等，他在肯定其学术成就的同时，准确地指出他们的某些败笔或不足之处。在历史方面，他对不少有争议的事件进行了考证，如秦越人为什么称“扁鹊”？牛耕始于何时？等等。他反对对史实的夸张及牵强附会，批评了刘歆为提高数学地位而把《三统历》中的数学知识与《春秋》附会在一起的作法。他说：“所谓春秋者，属辞比事之书，与数学了不相干。而亦胡为妄取历算，一一而偶之哉？班固不明此理，不敢削去，千古而下，又无为辩之者，深可恨也。”[2]

这种独立思考的精神，贯穿于他的全部数学研究。他“自幼喜算术”，曾读过不少数学著作，但不甚满意，“无以当吾心焉。”当他得到洞渊算书并领会了其中的内容以后，立即抓住这一极有发展前途的课题，作为自己后半生的主攻方向。这一选择不能不说是他独立思考的结果。在前人的基础上，他进行了大胆的发明创造，简化了天元式，总结出一套普遍适用的列方程程序，还发明了负号和新的小数记法。对于那些前人已经解决的问题，他也往往给出更好的方法。例如，《测圆海镜》的某些题，便在给出洞渊或石信道方法之后，又给出自己的新方法；《益古演段》则把蒋周的旧术与李冶的新术并列，以便读者比较优劣。尤其应该指出

---

① 李冶．测圆海镜细草．《知不足斋丛书》本．1798．后序．

② 李冶．敬斋古今黈．《丛书集成初编》本．1935．29

的是《测圆海镜》在体例上的创新。李冶之前的算书一般是问题集的形式，各章（卷）内容大体上平列。但李冶在《测圆海镜》之首，却集中给出了解各卷问题所需的定义、定理和公式，使该书基本上成为一个演绎体系。

四、晓然示人

李冶不仅是一位数学家，而且是一位优秀的教师。后人盛赞李冶“导掖其秀民，仁之至也。其徒卒昌于时，孰不曰文正公所作成也。”[①] 他从不把自己的成果束之高阁，而是传徒授业。尽量发挥其社会效益。他在数学教育中提倡“晓然示人”，反对故弄玄虚。他曾批评当时的不良学风：“今之为算者，未必有刘（徽）、李（淳风）之工，而偏心踦见，不肯晓然示人。惟务隐互错糅，故为溟滓黯黮，惟恐学者得窥其仿佛也。”[②] 另一方面，他也反对那种“浅近粗俗无足观”的著作，主张深入浅出。他在得到《益古集》后，既肯定了它的学术价值，又“恨其闷匿而不尽发”，于是以该书为蓝本，“移补条段，细缗图式”，这说明他能为广大读者着想。李冶同时代的天元术著作不少，但唯有李冶的著作流传至今，其原因之一就是他具有晓然示人的文风，著作便于读者阅读。

① （元）袁桷. 清容居士集. 卷十八，上海涵芬楼影印元刊本，9. 文正，李冶谥号.

② 李冶. 益古演段序. 《丛书集成初编》本. 1936

第二章　《测圆海镜》

《测圆海镜》是李冶的代表作，他工作的出发点是研究几何问题，而所用的数学工具则是代数，即新兴的天元术。他在前人的基础上把天元术发展到成熟的阶段。

《测圆海镜》全书12卷，前有李冶自序一篇。完稿于1248年，在当时没有引起重视，直到1282年才正式出版，此时李冶已经去世3年了。

本章对该书的内容、价值和版本等进行讨论。

第一节　《测圆海镜》内容分析

一、天元式与天元术

“天元”一词，在秦九韶《数书九章》里已使用过，但没有未知数的意思，天元一便是单位一。而在李冶的《测圆海镜》中，天元一相当于现在的未知数 x。书中的方程是用天元式表示的，所用数码则是古代算筹形象的反映。摆筹的方式有竖式、横式两种：

竖式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
分别表示	1，	2，	3，	4，	5，	6，	7，	8，	9

使用时横竖相间，可以表示任何正整数。后来，这种算筹记数的形式演变为数码，用于书写。

天元式实际起源于算筹开方式，两者形式类似，只是开方式

实	一	𝍣	二	𝍡	𝍫
法		𝍣	〇	〇	〇
借算			𝍠	〇	〇

图 2.2.1 开方式

古法图式	今法图式
a_n	b_n
⋮	⋮
a_1 天	b_1 地
c 太	c 太
b_1 地	a_1 天
⋮	⋮
b_n	a_n

图 2.2.2

未标明未知数，如图 2.2.1，这个开方式的意义是

$$100x^2+4\ 000x=15\ 225$$

如前所述，天元式的表示法最初很繁，到李冶时代，天元式已经简化了，有古法图式（元裕天元式）与今法图式（彭泽天元式）（图 2.2.2）两种，都把太放在中间，表示常数项。按古法图式，天元在上，地元在下，以天元代表未知数的正一次幂，天上一层则高一次；以地元代表未知数的负一次幂，地下一层则低一次。今法图式的顺序与之相反。这种用两个字表示正、负数次幂的方法，显然比各次幂都用不同字表示的方法简便。

在《测圆海镜》中，李冶进一步简化了天元式，他取消地元，只用一个天元，采用正数次幂在上、负数次幂在下的次数由高到低的排列顺序，而且式中只写元或太一个字。例如，方程

$$-x^2+320x-132\ 800+13\ 056\ 000x^{-1}=0$$

（卷六第十五题）便写为图 2.2.3 的形式。也可不在常数项旁标太而在一次项旁标“元”。在这里，太是太极的简称，元是天元的简称。天元式中的各层即方程的各项系数，负系数则加一斜线。但在列方程的过程中，李冶为了叙述方便，还是按开方式给方程各项以不同名称：x 的最高次幂系数称隅、法、隅法或常法，一次幂系数称从、方或从方，中间各系数称廉，常数项称实。例如方程

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$

其中 e 称实，d 称从，c 称第一廉，b 称第二廉，a 称隅。若系数为负，则加“益”或“虚”字。

图 2.2.3

李冶的天元式，既可表示方程，又可表示多项式。从形式看，两者并无区别。但具体到算题中，两者是不会混淆的。因为列方程有固定程序，在“相消”前出现的是多项式，相消时便把两个多项式联在一起，变为方程了。

《测圆海镜》中的列方程程序分为三步：首先立天元一，这相当于设未知数 x；然后寻找两个等值的而且至少有一个含天元的多项式（或分式）；最后把两个多项式（或分式）联为方程，通过相消，化成标准形式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

这便是李冶的天元术。所谓“相消”，相当于现代的移项及合并同类项。只是当时没有等号，所以没有移项的步骤，而是直接消去两个等值多项式中的同类项。

显然，李冶的天元术是一套完整的程序。电子计算机产生以后，有人把天元术比作计算机的软件，把算筹比作计算机的硬件，这是很恰当的。

在推导方程的过程中，必然要进行多项式的四则运算。《测圆海镜》中的运算方法与现在类似，不同的是那时用算筹而不用阿拉伯数码。书中的多项式加、减，是同次幂系数的加、减；常数乘多项式是用常数乘多项式的各项系数；天元或天元幂乘多项式是将“元”字（或“太”字）移下一层或数层；天元或天元幂除多项式是将“元”字（或“太”字）移上一层或数层；多项式乘

多项式是用一个多项式的各项分别乘另一个多项式的各项，然后合并同类项。多项式除多项式是不能进行的，李冶称之为“不受除”，若在建立方程的过程中遇到这种情况，他便采用去分母的办法（详见第三节）。

从书中各题来看，李冶能够相当熟练地进行分式四则运算。分式相乘时，他注意把处于分子和分母位置上的公因子约去；不同分母的分式相加时，他通过“齐分母”即通分，化为同分母分式相加，方法与现在一致。例如卷五第十八问草中，

$$c_1=\frac{0.5x^2-600x+360\ 000}{600-x}$$

$$a_{13}=\frac{-51x^2+61\ 200}{c_1\ (600-x)}$$

$$b_{13}=\frac{61\ 200}{c_1}\qquad c_{13}=102$$

在计算 $a_{13}+b_{13}+c_{13}$时，便化 b_{13}为

$$\frac{61\ 200\ (600-x)}{c_1\ (600-x)}$$

化 c_{13}为

$$\frac{102\ (0.5x^2-600x+360\ 000)}{c_1\ (600-x)}$$

然后把分子相加。

二、各卷内容介绍

《测圆海镜》共 12 卷，卷一为理论基础，以下各卷均为算题。卷一之首为圆城图式（图 2.2.4 甲）。该图以一个直角三角形及其内切圆为基础，通过若干互相平行或垂直的直线，构成 16 个直角三角形。全书 170 题都是已知某三角形边长，求圆径。为讨论问题方便，图 2.2.4 乙中用拉丁字母及阿拉伯数码表示。

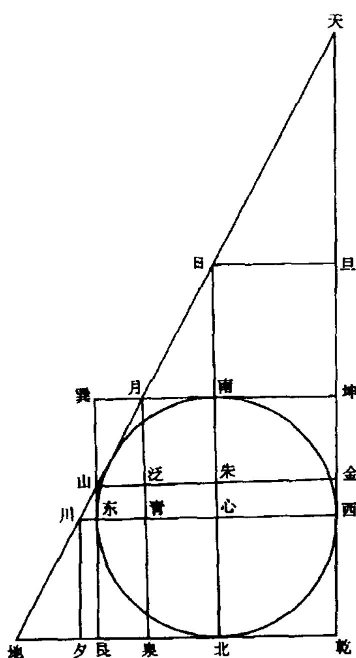


图 2.2.4　甲

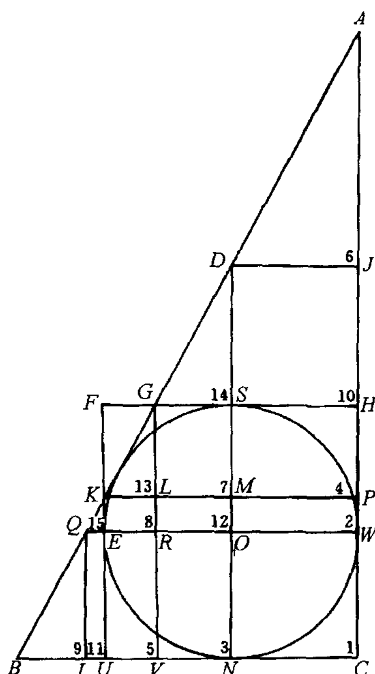


图 2.2.4　乙

圆城图式之后是“总率名号”和“今问正数”。总率名号给出图中各勾股形的名称：天地乾为通（或大）勾股形，天川西为边勾股形，日地北为底勾股形，天山金为黄广勾股形，月地泉为黄长勾股形，天日旦为上高勾股形，月地泉为下高勾股形，月川青为上平勾股形，川地夕为下平勾股形，天月坤为大差勾股形，山地艮为小差勾股形，日川心为皇极勾股形，月山泛为太虚勾股形，日月南为明勾股形，山川东为叀[①] 勾股形。勾股形中的短直角边、长直角边及斜边分别以勾、股、弦名之，如川西为边勾，天西为边

① 叀，zhuān，意为小.

股，天川为边弦。今问正数以通弦 680、通勾 320、通股 600 作为基数，给出各勾股形的三事（即勾、股、弦）及五和五较的数值，以便验证。若以 a，b，c 依次代表勾、股、弦，则五和五较为：勾股和 $a+b$，勾股较 $b-a$，勾弦和 $a+c$，勾弦较 $c-a$，股弦和 $b+c$，股弦较 $c-b$，弦较和 $c+(b-a)$，弦较较 $c-(b-a)$，弦和和即三事和 $a+b+c$，弦和较即圆径 $a+b-c$。李冶选择 320，600 和 680 三数作为通勾股形的边长是别具心裁的，它们使得圆城图式中各三角形的边长都是整数。

卷一的最后部分“识别杂记”，阐明了各勾股形边长及其与圆径的关系，内分诸杂名目、五和五较、诸弦、大小差、诸差、诸率互见、四位相套及拾遗 8 项。识别杂记共 600 余条，每条可看作一个定理或公式，这部分内容是对中国古代关于勾股容圆问题的全面总结。

卷二含题目 14 个，都是比较基本的，故李冶称之为“正率”。特别是其中包括 10 种容圆直径的求法，即容圆公式（d 表示圆的直径，a_n，b_n，c_n 分别表示第 n 个三角形的勾、股、弦）：

（1）勾股容圆 $d=\dfrac{2a_1b_1}{a_1+b_1+c_1}$

（2）勾上容圆 $d=\dfrac{2a_2b_2}{b_2+c_2}$

（3）股上容圆 $d=\dfrac{2a_3b_3}{a_3+c_3}$

（4）勾股上容圆 $d=\dfrac{2a_{12}b_{12}}{c_{12}}$

（5）弦上容圆 $d=\dfrac{2ab}{a+b}$

（6）勾外容圆 $d=\dfrac{2a_{10}b_{10}}{c_{10}+(b_{10}-a_{10})}$

（7）股外容圆 $d=\dfrac{2a_{11}b_{11}}{c_{11}-(b_{11}-a_{11})}$

（8）弦外容圆　$d=\frac{2a_{13}b_{13}}{(a_{13}+b_{13})-c_{13}}$

（9）勾外容圆半　$d=\frac{2a_{14}b_{14}}{c_{14}-a_{14}}$

（10）股外容圆半　$d=\frac{2a_{15}b_{15}}{c_{15}-b_{15}}$

上面（1）式在《九章算术》中已有。其他九式，大概就是李冶所说的洞渊九容公式[①]。(5)式的勾股形之弦，圆城图式未画出，它可以通过圆心任取（但须与通勾、通股相交）。

卷三至卷十是以已知条件的不同分类的。卷三为“边股”，即已知条件含边股，或者说以边股配其他各事；卷四、卷五、卷六依次为“底勾”、“大股”、“大勾”；卷七、卷八为“明叀”，即已知条件含明勾股形的某事及叀勾股形的某事；卷九上为“大斜”，卷九下为“大和”；卷十为“三事和”（指通勾股形的三事和）；卷十一是综合题，称为“杂糅”；卷十二为“之分”，多用线段之比。

卷二至十二共170题，都以圆径为所求。各题包括法与草两部分。《四库全书》馆案语称：“草者法之本，法者草之用。法使人易于推步，而草则存其义以俟知者。”[②] 实际上，法是从草中提炼出来的，草用具体数字而法为一般文字叙述。下面以卷四第六问为例，说明李冶是怎样用天元术解题的。左边是原文，右边是译文。（原草为一整段，这里为叙述方便，分成若干段。）

原文	译文
或问乙出东门，南行不知步数而立。甲出北门，东行二百步望见乙，复就乙斜行一百七十步与乙相会。问答同前。	已知　$a_3=200$，$c_{11}=170$。求　d。

① 有的学者认为九容公式应是除去弦上容圆的九容，如清·刘岳云，见《测圆海镜通释》. 算经书局，1896

② 李冶. 测圆海镜细草. 卷二，《知不足斋丛书》本. 1798. 14

法曰：以二行差乘甲东行为实，甲东行内减二行差为益方，一步常法，得半径。

$x^2-[a_3-(a_3-c_{11})]x+a_3(a_{13}-c_{11})=0$

（其中 x 为半径）

草曰：（1）识别得二行相减，余三十步，即乙出东门南行步也。

由识别杂记，

$b_{15}=a_3-c_{11}$

$=30$。

（2）立天元一为城半径。

设圆城半径为 x，

（3）加乙南行，得 〡元 ≡〇 为小股。

$b_{11}=x+b_{15}$

$=x+30$

（4）副置甲东行步，上位减天元，得下式

〣元 ‖〇〇 为小勾。

$a_{11}=a_3-x$

$=200-x$

（5）下位加天元，得

〡元 ‖〇〇 为大勾也。

$a_1=a_3+x$

$=200+x$

（6）乃置大勾，以小股乘之，得下式

〡

‖≡〇元

⊥〇〇〇，合以小勾除，不受除，便以此为大股（内带小勾分母）。

因为 $\Delta_1\backsim\Delta_{11}$，

所以 $b_1=\dfrac{a_1\cdot b_{11}}{a_{11}}$

$=\dfrac{x^2+230x+6\ 000}{200-x}$

（7）又倍天元，以小勾乘之，得 ⫲ ，

||||○○元

以减于大股，得

|||

|⊻ ○元，又倍之，

⊥○○○

⊥

得 |||≡○元，为两

|=○○○

个股圆差。

$2b_{10}=2(b_1-2x)$

$=\dfrac{2[x^2+230x+6\ 000-2x(200-x)]}{200-x}$

$=\dfrac{6x^2-340x+12\ 000}{200-x}$

（8）合以勾圆差乘之，缘为其中已带小勾分母，更不须乘，便以此为黄方① 幂（更无分母），寄左。

因为$\frac{1}{2}d^2=a_{11}\cdot b_{10}$②

$d^2=2a_{11}\cdot b_{10}$

$=6x^2-340x+12\ 000$

（9）然后倍天元，以自之，为同数，与左相消，得

‖

|||≡○元。

|=○○○

又因为 $d^2=(2x)^2=4x^2$

所以 $4x^2$

$=6x^2-340x+12\ 000$

相消，得

$2x^2-340x+12\ 000=0$

---

① 黄方，指圆城图式中圆的外切正方形边长（该正方形常画为黄色），实为圆径.

② 这是"识别杂记"中的一个公式.

（10）上下俱半之，得

|

|𝍰〇。

⊥〇〇〇

化简，得

$x^2-170x+6\,000=0$

（11）以平方开之，得一百二十步，倍之即圆径也。合问。

解方程，得

$x=120$

所以 $d=2\times120=240$

为了能更清楚地看出法与草的关系，现把第 6 步至第 10 步用字母推导一遍：

$$b_1=\frac{a_1\cdot b_{11}}{a_{11}}=\frac{(x+a_3)\ (x+b_{15})}{a_3-x}$$

所以 $2b_{10}=2\ (b_1-2x)$

$$=\left[\frac{(x+a_3)\ (x+b_{15})}{a_3-x}-2x\right]$$

所以 $d^2=(2x)^2=2a_{11}\cdot b_{10}$

$$=2\ (a_3-x)\left[\frac{(x+a_3)\ (x+b_{15})}{a_3-x}-2x\right]$$

$$=2\left[(x+a_3)\ (x+b_{15})\ -2x\ (a_3-x)\right]$$

化简，得

$$2x^2=x^2+a_3x+b_{15}x+a_3b_{15}-2a_3x+2x^2$$

所以，$x^2-(a_3-b_{15})\ x+a_3b_{15}=0$

即　　$x^2-[a_3-(a_3-c_{11})]\ x+a_3\ (a_3-c_{11})\ =0$

题中的“寄左”是把筹算的中间结果寄放在左边的意思，也可当名词用，表示放在左边的那个多项式，实为两个等值多项式中的第一个，“同数”则表示另外一个。开头所列的“识别”来源于“识别杂记”，是与本题有关的定义、定理或公式。稍微复杂一点的题，总要列几条“识别”，以说明作题的依据。我们还注意到，

化简后的方程是不标元或太的，总以最下一层表常数项，以上一层则高一次。

《测圆海镜》中各题答案相同，即圆径为 240；所用各三角形边长，也大多是前后一致。但为“考较诸率”，卷二第十三问及卷十一第十一问所用勾股值与前后不同。李冶这样做，一方面是为了说明识别杂记中的各定理是普遍适用的，另一方面也是为了让读者更灵活地掌握天元术。卷八第十五问中，李冶还给出与今问正数中各勾股值不成比例的四组勾股值，即勾 3 股 4，勾 5 股 12，勾 7 股 24，勾 9 股 40。显然，据各组值求得的弦长均为整数。李锐（1773～1817）据此新设四率，放在卷一的“识别杂记”之后。第一率勾 360 股 480，第二率勾 300 股 720，按这两率算得圆径还是 240；第三率勾 392 股 1 344，算得圆径 336；第四率勾 810 股 3 600，算得圆径 720。

在选未知数问题上，李冶一般是立天元一为城径或半城径，因为这样可以直接求出要求的量，这种思想和现代一致。但他有时也根据需要设间接未知数。

例如卷九上第二问：“或问甲丙俱在西北隅起，丙向南行不知步数而立，甲向东行望见丙，就丙斜行六百八十步与丙相会，丙云我南行步多于甲东行二百八十步。问答同前。”

按本题草，设大勾 a_1 为 x，则 $b_1=x+280$

$$2a_1b_1=2x(x+280)=2x^2+560x \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}\text{同数}&=[c_1+(b_1-a_1)][c_1-(b_1-a_1)]\\&=(680+280)(680-280)\\&=384\ 000\end{aligned} \qquad (2)$$

由（1）、（2）消得

$$-2x^2-560x+384\ 000=0$$

求得 x 后，再求城径就很容易了，不必使用天元术，但有的题在求出间接未知数后，仍须用天元术求城径。如卷七第二问第四法，

先立天元一为皇极弦 c_{12}，求得 c_{12}后再立天元一为半径，由方程 $(x+a_{15})^2+(x+b_{14})^2=c_{12}^2$求得半径 x。

《测圆海镜》还有一个显著特点，就是作者很注意一题多法。李冶给出不同解法，有时是为了比较方法的优劣，让读者弃繁从简。但一般来说，不同方法的繁简差不多，其作用主要是启发读者思路，以便灵活运用天元术。

例如卷四第八问："或问乙从乾隅南行不知步数而止。甲出北门东行二百步望见之，复就乙斜行六百八十步与乙相会。问答同前。"

按方法一草，由识别杂记得

$$c_1=680$$

$$r+b_{10}=c_1-a_3=680-200=480$$

设圆城半径为 x，则

$$b_1=x+480 \quad a_1=x+200$$

$$b_1^2=x^2+960x+230\,400 \tag{1}$$

同数$=(c_1+a_1)(c_1-a_1)=(880+x)(480-x)$

$$=-x^2-400x+422\,400 \tag{2}$$

由（1）、（2）消得

$$-2x^2-1360x+192\,000=0$$

开方，得

$$x=120$$

按方法二草，设大差 b_{10}为 x，则

$$r=c_1-a_3-x=480-x$$

$$r^2=x^2-960x+230\,400 \tag{1}$$

$$a_{11}=200-(480-x)=x-280$$

同数（即 r^2）$=\dfrac{x(x-280)}{2}=0.5x^2-140x \qquad (2)$

由（1）、（2）消得

$$0.5x^2-820x+230\,400=0$$

开方，得

$$x=360$$

很明显，方法一用的是勾股定理，而方法二则利用公式

$$\frac{1}{2}d^2=a_{11}\cdot b_{10}$$

全书 170 题中，载有不同方法的有 34 题。其中二法的 30 题，三法的 1 题，四法的 1 题，五法的 2 题。这里所说的法，均指推导方程的方法。至于方程解法，李冶是当作已知的，书中基本上没有叙述。只有两点值得提出，李冶注意到在开方（即解方程）过程中，常数项可能增大，他称这种情形为"益积"；他还注意到常数项符号可能改变，他称之为"翻法"。有趣的是，与李冶同时代的另一位大数学家——秦九韶，也深入研究了方程理论。李冶把重点放在建立方程，而秦九韶则把重点放在解方程。秦九韶的《数书九章》全面总结了求高次方程正根的方法，比《数书九章》晚一年成书的《测圆海镜》则全面总结了推导方程的方法——天元术。两位互不相识的数学家，"配合"如此默契，这在数学史上是罕见的。实际上，两人可能从没听说过对方，更不知其著作了。李冶生活在金末元初的北方，秦九韶生活在南宋，当时南北文化交流极少。到 1279 年元灭南宋、统一南北方时，秦九韶已去世多年①，李冶也于这年去世。所以，我们看到两人的著作中从未提到过对方，就不会感到奇怪了。两人各自独立地进行数学研究，对我国数学的发展做出了几乎同样重要的贡献。

三、演绎体系

《测圆海镜》基本上是一个演绎体系。卷一包含了解题所需的

① 据钱宝琮考证，秦九韶死于 1261 年．见钱宝琮．秦九韶《数书九章》研究．载《宋元数学史论文集》．北京：科学出版社，1966

定义、定理、公式，后面各卷问题的解法均可在此基础上以天元术为工具推导出来。而位于“识别杂记”之首的“诸杂名目”又包含了推导后面各命题的基本理论，它实际上是全书的纲纪。

“诸杂名目”中的定义如下：

1. 明勾叀股相得[①]（即 $a_{14}\cdot b_{15}$）名为内率（求虚积）。

2. 明股叀勾相得（即 $b_{14}\cdot a_{15}$）名为外率（求虚积）。

3. 虚勾虚股相得（即 $a_{13}\cdot b_{13}$）名为虚率（求虚积）。

4. 高股平勾差（即 b_7-a_8）名角差，又名远差。

5. 明叀＝差共〔即 $(b_{14}-a_{14})+(b_{15}-a_{15})$〕名次差，又名近差，又名戾和。

6. 勾圆差之股、股圆差之勾相并（即 $b_{11}+a_{10}$）名混同和。

7. 明叀＝差较〔即 $(b_{14}-a_{14})-(b_{15}-a_{15})$〕名傍差。

8. 虚差不及傍差〔即 $(b_{14}-a_{14})-(b_{15}-a_{15})-(b_{13}-a_{13})$〕名䔇（cuò）差。

9. 虚差旁差共〔即 $(b_{14}-a_{14})-(b_{15}-a_{15})+(b_{13}-a_{13})$〕名䔇和。

在“总率名号”中已定义过的诸三角形及各边名称，这里不再定义。对于当时人们熟知的和见题自明的一些数学概念，也不再定义，如勾、股、弦、中差（勾股差）、小差（股弦差）、大差（勾弦差）、双差（大差、小差之和）、黄方（内容圆直径）、股圆差（大差股 b_{10}）、勾圆差（小差勾 a_{11}）、梯头（$2b_{15}$或 $2a_{14}$）、梯底（$2b_2$或 $2a_3$）等。

诸杂名目中有定理（公式）30 余个，最重要的是下面 10 个圆径公式，可称基本公式。

1. 凡大小差相乘为半段径幂，即

---

① 相得即相乘.

$\frac{1}{2}d^2=(c_1-a_1)(c_1-b_1)$ 或 $\frac{1}{2}d^2=b_{10}\cdot a_{11}$

2. 大差勾小差股相乘亦同上，即

$\frac{1}{2}d^2=a_{10}\cdot b_{11}$

3. 虚勾乘大股得半段径幂，即

$\frac{1}{2}d^2=a_{13}\cdot b_1$

4. 虚股乘大勾亦同上，即

$\frac{1}{2}d^2=b_{13}\cdot a_1$

5. 边股叀股相乘得半径幂，即

$r^2=b_2\cdot b_{15}$

6. 明勾底勾相乘亦同上，即

$r^2=a_{14}\cdot a_3$

7. 黄广股黄长勾相乘为径幂，即

$d^2=b_4\cdot a_5$

8. 高股平勾相乘得半径幂，即

$r^2=b_7\cdot a_8$

9. 明弦明股并与叀弦叀勾并相乘得半径幂，即

$r^2=(c_{14}+b_{14})(c_{15}+a_{15})$

10. 明弦明勾并与叀弦叀股并相乘亦同上，即

$r^2=(c_{14}+a_{14})(c_{15}+b_{15})$

另外，如下定理也很重要：

11. 天之于日与日之于心同，即 $c_6=b_{12}$
12. 心之于川与川之于地同，即 $a_{12}=c_9$
13. 日之于心与日之于山同，即 $b_{12}=c_7$
14. 川之于心与川之于月同，即 $a_{12}=c_8$
15. 凡勾股和即弦黄和，即 $a_1+b_1=c_1+d$

16. 凡大差即股黄较，即 $c_1-a_1=b_1-d$

17. 凡小差即勾黄较，即 $c_1-b_1=a_1-d$

有些定理，李冶是当作已知而未列出的，如“相似勾股形对应边成比例”、“全等勾股形对应边相等”、“从圆外一点向圆所引的两条切线的长相等”、“切线垂直于过切点的半径”等。

识别杂记中的各命题，均可由诸杂名目推出。

例 1. “皇极三事和即通弦”（取于“五和五较”），即 $a_{12}+b_{12}+c_{12}=c_1$

证：因为 $c_6=b_{12}$， $a_{12}=c_9$，（定理 11，12）

所以 $a_{12}+b_{12}+c_{12}=c_9+c_6+c_{12}=c_1$

例 2. “大弦内减大小差共即圆径”（取于“大小差”），即 $c_1-[(c_1-a_1)+(c_1-b_1)]=d$

证：$c_1-[(c_1-a_1)+(c_1-b_1)]$

$=c_1-[b_1-d+a_1-d]$（定理 16，17）

$=c_1+2d-b_1-a_1$

$=d$（定理 17）

各卷中习题的演算也离不开“诸杂名目”。从上述卷四第六问中可以看到，公式 $\frac{1}{2}d^2=a_{11}\cdot b_{10}$ 起了关键作用。

再如卷三第十二问：“或问见边股四百八十步，叀弦三十四步”。即已知 $b_2=480$，$c_{15}=34$，求 d。

草（译文）：设 $b_{15}=x$，则

$$a_8=x+34, \tag{1}$$

$$b_7=\frac{480-x}{2}=-0.5x+240 \tag{2}$$

$$r^2=(1)\times(2)=-0.5x^2+223x+8\,160 \tag{3}$$

同数 $=480x$ (4)

由（3）与（4）消得

$$-0.5x^2-257x+8160=0$$

开方得

$$x=30$$

所以　$d=2\sqrt{480\times 30}=240$ (5)

上题中，(3) 式用的是公式 $r^2=a_8\cdot b_7$，(4) 式与 (5) 式用的是公式 $r^2=b_2\cdot b_{15}$

在建立高次方程的过程中，基本公式的作用也十分明显，如卷七第十八问："或问甲丙二人俱在西北隅，甲向东行丙向南行，又乙出南门东行，丁出东门南行，各不知步数而立。四人遥相望见，悉与城参相直[①]。既而相会，甲云：我与乙共行了三百九十二步，丙云：我与丁共行了六百三十步。问答同前。" 即已知 $a_1+a_{14}=392$，$b_1+b_{15}=630$，求 d。

草（译文）：由识别杂记，得

$$a_1+a_{14}-r=c_5$$

$$b_1+b_{15}-r=c_4$$

设圆城直径为 x，则

$$a_5^2=c_5^2-x^2=\left(392-\frac{x}{2}\right)^2-x^2$$

$$=-0.75x^2-392x+153\,664, \qquad (1)$$

$$b_4^2=c_4^2-x^2=\left(630-\frac{x}{2}\right)^2-x^2$$

$$=-0.75x^2-630x+396\,900 \qquad (2)$$

$$(d^2)^2=(1)\times(2)$$

$$=0.562\,5x^4+766.5x^3$$

$$-165\,963x^2-252\,393\,120x+60\,989\,241\,600 \qquad (3)$$

$$\text{同数}=(x^2)^2 \qquad (4)$$

由 (3) 与 (4) 消得

① 参同三，三点共线称参相直，此处指两人的连线与圆城相切.

$-0.4375x^4+766.5x^3-165963x^2-$

$252393120x+60989241600=0$

开方，得

$x=240$

上题中，(3)式使用了公式 $d^2=a_5 \cdot b_4$，这是建立方程的依据。

除诸杂名目外，识别杂记中还有几百个命题。这些命题既可由诸杂名目导出，又是后面各卷习题的依据。其中以表明各率勾股形三事和及通（大）勾股形十三事（指勾、股、弦及五和五较）之间关系的 14 个关系式最为重要（见“五和五较”）：

(1) $a_2+b_2+c_2=b_1+c_1$

(2) $a_3+b_3+c_3=a_1+c_1$

(3) $a_4+b_4+c_4=2b_1$

(4) $a_5+b_5+c_5=2a_1$

(5) $a_6+b_6+c_6=b_1$

(6) $a_7+b_7+c_7=b_1$

(7) $a_8+b_8+c_8=a_1$

(8) $a_9+b_9+c_9=a_1$

(9) $a_{10}+b_{10}+c_{10}=b_1+c_1-a_1$

(10) $a_{11}+b_{11}+c_{11}=c_1-(b_1-a_1)$

(11) $a_{12}+b_{12}+c_{12}=c_1$

(12) $a_{13}+b_{13}+c_{13}=a_1+b_1-c_1$

(13) $a_{14}+b_{14}+c_{14}=c_1-a_1$

(14) $a_{15}+b_{15}+c_{15}=c_1-b_1$

这 14 个公式在后面经常用到。例如，卷二的 $d=\frac{2a_2b_2}{b_2+c_2}$（勾上容圆）便可由 $a_2+b_2+c_2=b_1+c_1$ 推出。

因为$\triangle_1 \backsim \triangle_2$，

所以 $$\frac{a_2}{a_2+b_2+c_2}=\frac{a_1}{a_1+b_1+c_1} \quad (1)$$

$$\frac{b_2}{b_2+c_2}=\frac{b_1}{b_1+c_1} \quad (2)$$

又
$$a_2+b_2+c_2=b_1+c_1 \quad (3)$$

三式连乘加倍，得

$$\frac{2a_2b_2}{b_2+c_2}=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1+c_1}$$

而
$$d=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1+c_1}\ \text{（已知）}$$

所以
$$d=\frac{2a_2b_2}{b_2+c_2}$$

其中的（3）式可由诸杂名目推出。

因为　$OW=WC$

所以　$AC=AW+OW$。

因为　$QO=QB$（诸杂名目定理12），

所以　$AB=AQ+QO$

所以　$AC+AB=AW+OW+AQ+QO$

$$=AW+AQ+QW$$

即
$$a_2+b_2+c_2=b_1+c_1$$

总之，由诸杂名目中的定义和定理（公式）出发（有时需加上若干李冶当作已知而未列出的命题），可以推出识别杂记中其他部分的命题，而整个识别杂记则构成解题的理论基础，所以《测圆海境》基本上是一个演绎体系。

引人注目的是，李冶在《测圆海镜》中广泛应用了对偶原理，使整个体系更加和谐。这里所说的对偶，是与圆城图式有关的一个几何概念。相对于内切圆有相同位置关系的一对图形，称为对偶图形。对偶图形中度量问题的解法是相同的，这叫对偶原理。例如，线段 AC 与 BC 对偶，QE 与 DS 对偶，三角形 AGH 与 BKU 对偶；把 AD 与 DO 看作一个图形，把 BQ 与 QD 看作另一图形，则这两个图形也是对偶的。

在圆城图式中，大勾股形内的14个勾股形包含6对对偶图形，即：$\triangle_2$与$\triangle_3$，$\triangle_4$与$\triangle_5$，$\triangle_6$与$\triangle_9$，$\triangle_7$与$\triangle_8$，$\triangle_{10}$与$\triangle_{11}$，$\triangle_{14}$与$\triangle_{15}$。对偶图形中的公式具有相同的形式，例如：$\triangle_{14}$与$\triangle_{15}$对偶，所以勾外容圆半及股外容圆半公式的形式完全一样：

$$d=\frac{2a_{14}b_{14}}{c_{14}-a_{14}},\ d=\frac{2a_{15}b_{15}}{c_{15}-b_{15}}$$

证明了第一个公式，第二个公式便不证自明了。在识别杂记中，有大量对偶性命题，如“日之于心与日之于山同，川之于心与川之于月同”是对偶的，公式$\frac{1}{2}d^2=a_{13}\cdot b_1$与$\frac{1}{2}d^2=b_{13}\cdot a_1$是对偶的，等等。不难发现，10个“基本公式”可分为5对对偶命题。根据对偶原理，只要对偶命题中一个为真，另一个必为真。这便在证明中收到了事半功倍的效果。

算题中也存在对偶关系。从已知条件来看，卷三与卷四对偶，卷五与卷六对偶。这就是说，卷三第n题与卷四第n题（$n=1,2,\cdots,17$）的已知条件对偶，卷五第n题与卷六第n题（$n=1,2,\cdots,18$）的已知条件对偶。下面把卷三与卷四前7题已知条件列为表。

已知条件 题号 / 卷数	1	2	3	4	5	6	7
卷三	b_2，c_4	b_2，a_{11}	b_2，b_{11}	b_2，a_{15}	b_2，a_{14}	b_2，c_{10}	b_2，c_2
卷四	a_3，c_5	a_3，b_{10}	a_3，b_{10}	a_3，b_{14}	a_3，b_{15}	a_3，c_{11}	a_3，c_3

这样，我们知道了前一卷问题的解法，后一卷的对偶题便可依法演算，这对于问题的理解与计算都提供了方便。例如卷三第五问：“或问乙出南门，东行七十二步而止，甲出西门，南行四百八十步，望乙与城参相直。问答同前。法曰：“以乙东行幂乘甲南行为实，以东行幂为从方，甲南行步内减二之东行步为益廉，一步常法，得

半径。”依法列式，设半径为 x，得

$$x^3-(b_2-2a_{14})x^2+a_{14}^2x+a_{14}^2b_2=0$$

卷四第五问：“或问乙出东门南行三十步而止，甲出北门东行二百步望见乙与城参相直。问答同前。法曰：以甲东行步乘乙南行幂为实，以乙南行幂为从，甲东行内减二之乙南行为益廉，一步为隅，得半径。”依法列式，得

$$x^3-(a_3-2b_{15})x^2+b_{15}^2x+b_{15}^2a_3=0$$

显然，以上二式的形式相同，或者说对应系数一一对偶。这样的方程可称为对偶方程。

第二节　《测圆海镜》的学术价值

一、体例上的进步

李冶之前的各种算书，一般采取问题集的形式，各章（卷）内容大体上平列。李冶以演绎法著书，是中国数学史上的一个进步。虽然从整体来看，《测圆海镜》的体系不如欧几里得（Euclid）《几何原本》严密，但在定义方法上却有自己的长处。欧几里得试图给每一个几何概念下定义，这就不可避免地使点、线、面等基本概念的定义模糊。例如，他用“没有部分”定义点，用“有长度而没有宽度”定义线，用“有长度有宽度”定义面，这实际只是对几何形象的直观描述。从这种定义出发，不可能逻辑地引出什么结论。李冶对点、线、长度等基本几何概念一律不加定义，但书中所有定义都是以这些概念为基础，十分清楚。例如，“总率名号”中用“天之川”定义边弦、“天之西”定义边股，则边弦、边股分别表示圆城图式中的两条特定线段；诸杂名目中用“高股平勾差”定义角差，则角差为两个特定长度之差，用“明勾亩股相得”定义内率，则内率为两个特定长度之积。这种定义，有助于

阐明比较复杂的几何关系，可以成为演题的依据。

从构造性的观点来看，《测圆海镜》是我国数学史上第一个构造性体系。

数学的构造性有两个层次——内容的构造性与体系的构造性。内容的构造性包含二要素：一是研究对象可以通过数学手段构造出来，二是解题（或证题）步聚形成一个完整结构，各步之间有密切的逻辑联系。例如，“增乘开方法”便是构造性的，因为这是一个通过固定程序求出具体方根的方法；“素数无穷多”则是一个非构造性命题，我们不可能作出无限多个素数。孙子的“物不知数”问题虽可用数学手段求出结果，但解法中含有试猜的因素，未形成完整结构，所以也是非构造性的。具体内容的构造性不一定导致体系的构造性。当一个数学体系的内容是构造性的，而且各部分内容之间发生密切的逻辑联系，形成一个整体结构时，才称这个体系是构造性的。例如，《九章算术》的内容是构造性的，各部分内容之间有一定逻辑联系，卷一至卷九是平列的，若颠倒一下各卷顺序，亦无不可，所以整个体系并非构造性。《几何原本》则是一个构造性体系，它的全部命题都从有限的公理推出，全书形成一个整体结构，一般不可前后倒置。如果把非构造性体系比作一片独立生长的灌木，则构造性体系是一棵大树，在共同的根基上可以生出无数枝条。同非构造性体系相比，构造性体系无疑具有较强的生命力。

《测圆海镜》的研究对象可用数学手段构造出来，因为全书的研究对象只有一个——圆城图式。书中题目都是已知某些三角形边长，求圆径。显然，这些线段是可以作出的。其次，书中所有题目的解题步骤均形成完整结构，没有试猜的成分和经验性结果。这就是说，该书内容是构造性的。而各卷都与卷一的“识别杂记”发生密切的逻辑联系，所以是一个构造性体系。这一体系的强大生命力不仅表现在当时，而且表现在以后。清代李善兰、陈

维祺等数学家的工作，便使这一体系得到进一步发展。

如前所述，圆城图式中每个勾股形的三事和都对应着大勾股形十三事中的某一事。但反过来却不成立，因为没有哪一个勾股形的三事和等于 a_1+b_1 或 b_1-a_1。李善兰在《九容图表》中添加合、断二勾股形，使其三事和分别等于 a_1+b_1 与 b_1-a_1。这样，通勾股形内各率勾股形的三事和便与通勾股形十三事之间形成一一对应关系，使勾股容圆问题形成一完整体系。如图 2.2.5，过圆心 O 作 $A'B' /\!/ AB$，交 FH 于 S'，则 $\triangle A'B'C$为合勾股形，$\triangle A'S'H$ 为断勾股形。在另一篇文章《天算或问》中，李善兰还以文字形式给出容圆公式的统一表达式。译成现代符号，则为 $d=\frac{2a_j \cdot b_j}{p_j}$，其中 a_j，b_j 分别为 j 率勾股形的勾、股，其三事和为大勾股形十三事之一，而 p_j 则是 j 率勾股形的同一事。陈维祺则在《各率和较泛积表》文中，用“泛积”的概念把全部“识别杂记”统一起来。由于 j 率勾股形三事和 $a_j+b_j+c_j$ 可用大勾股形十三事之一 P_i 表示，而 j 率勾股形的任一事 p_j 与三事和 $a_j+b_j+c_j$ 之比，等于大勾股形同一事 P_j 与三事和 $a_1+b_1+c_1$ 之比，故

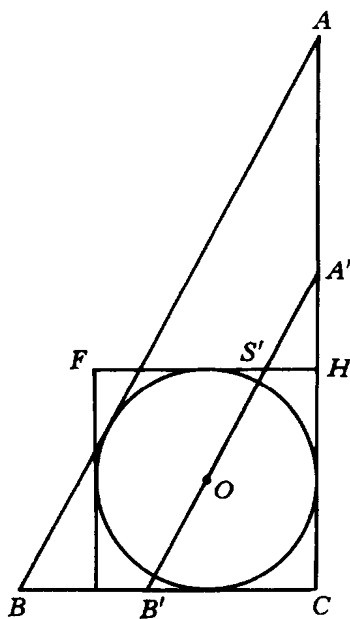


图 2.2.5

$$p_j=\frac{P_iP_j}{a_1+b_1+c_1}$$

陈维祺称 P_iP_j 为泛积。若两事泛积等，两事必等，所以可用泛积

来证明识别杂记中的任何定理[①]。

以上事实充分说明《测圆海镜》体系的和谐性及内在的发展潜力。

二、摆脱几何思维的束缚

《测圆海镜》的主要价值在天元术方面。它是我国现存最早的一部以天元术为主要内容的著作，所以是非常宝贵的。

宋代以前，方程理论一直受几何思维束缚，如常数项只能为正，因为常数项通常是表示面积、体积等几何量的；方程次数不高于三次，因为高于三次的方程就难于找到几何解释了。北宋刘益和南宋秦九韶研究过三次以上的方程，但他们不懂天元术，而且都认为方程的实（常数项）必须是正数。因此，秦九韶把实与含未知数的项放在方程一边时，就规定“实常为负”了。天元术的产生，标志着方程理论有了独立于几何的倾向。李冶对天元术的总结与提高，则使方程理论基本上摆脱了几何思维的束缚，实现了程序化。李冶在总结前人的方程理论时，大概认识到以几何方法推导方程的局限性。一方面，各种不同的问题需要不同的技巧，这使列方程工作成为一件相当困难的事；另一方面，用几何方法难以列出高次方程。而代数会使思考和运算步骤变得简单，无须很多特殊的技巧。李冶认识到，代数计算可以不依赖于几何，方程的二次项不一定表示面积，三次项也不一定表示体积。

列方程的固定程序是天元术的核心，它使天元术成为“算学至易至简之法。”[②] 清代数学家评价天元术说：“昔王孝通撰《缉古算经》，于表中夸诩甚至，诚以创术之难也。若得天元一术用之，

① 李善兰及陈维祺的有关工作，详见孔国平．测圆海镜导读．武汉：湖北教育出版社，1996

② （清）吴嘉善．天元问答．载《古今算学丛书》．1898

则欲创为新术如王孝通所撰者，俯取皆是，不必有思索之劳。”① 其实，《缉古算经》中的方法所以显得深奥难懂，就在于王孝通是用几何方法而不是用代数方法（天元术）推导出方程的。

随着数学思想的突破，李冶在方程理论上取得许多进展。

第一，李冶在《测圆海镜》中改变了传统的把实看作正数的观念，常数项可正可负，而不再拘泥于它的几何意义。例如卷六第四问的方程

$$-x^2-72x+23\ 040=0$$

和第七问的方程

$$-x^2+640x-96\ 000=0$$

其常数项符号就不同。实际上，《测圆海镜》中方程各项的符号均无限制，这是代数学的一个进步。

第二，李冶根据题目需要，多次用天元术列出高次方程。书中有 21 题列出三次方程，13 题列出四次方程，还有一题列出六次方程，即

$$-2x^6-714x^5-62\ 165x^4-2\ 220\ 302x^3+$$
$$82\ 926\ 816x^2+1\ 725\ 602\ 816x+$$
$$51\ 336\ 683\ 776=0$$

第三，书中出现了分式方程，并懂得用方程两边同乘一个整式的方法化分式方程为整式方程。下面，我们用现代符号说明李冶是怎样处理分式方程的。

若　$$A=\frac{q_1(x)}{q_2(x)},\tag{1}$$

又　$$A=p_1(x),\tag{2}$$

（$p_1(x)$，$q_1(x)$，$q_2(x)$ 均为整式）

则　$$\frac{q_1(x)}{q_2(x)}=p_1(x)$$

---

① （清）吴嘉善．天元问答．载《古今算学丛书》．1898

两边同乘$q_2(x)$，得

$$q_1(x)=p_1(x)\cdot q_2(x) \tag{3}$$

因为用筹演算，摆上分母不大方便，而且去分母的工作是必然要进行的，所以李冶常常在作到（1）式时，便把分母去掉了，具体作法是把分母暂放一边（即“寄母”），待作到$A=p_1(x)$这一步时，用“寄母”乘$p_1(x)$，便得（3）式了。

例如卷四第十一问：“或问甲乙二人同出北门，向东行至东北十字道口分路，乙折南行一百五十步而立，甲又向东行，甲前后通行了二百步，回望乙恰与城相直。问答同前。”

草（译文）：设圆城半径为x，则

$$a_1=x+a_3=x+200$$

$$a_{11}=a_3-x=200-x$$

又 $b_{11}=150$

因为 $\triangle_1 \backsim \triangle_{11}$，

所以 $b_1=\dfrac{a_1\cdot b_{11}}{a_{11}}=\dfrac{150x+30\ 000}{200-x}$，

（寄小勾分母$200-x$）

$$b_2=b_1-x=\frac{150x+30\ 000-x(200-x)}{200-x}$$

$$=\frac{x^2-50x+30\ 000}{200-x}\text{（寄母）}$$

而 $b_{15}=b_{11}-x=150-x$

所以 $r^2=b_2\cdot b_{15}$

$$=\frac{-x^3+200x^2-37\ 500x+4\ 500\ 000}{200-x} \tag{1}$$

又 $r^2=x^2$

所以 同数$=a_{11}\cdot x^2=-x^3+200x^2$ (2)

由（1）、（2）得

$$-x^3+200x^2-37\ 500x+4\ 500\ 000$$

$$=-x^3+200x^2$$

相消，得

$$-37\ 500x+4\ 500\ 000=0$$

解方程，得

$$x=120$$

所以　$d=2\times120=240$

如果 $q_2(x)=x^n$（n 为正整数），由于分母简单，李冶便不用"寄母"的步骤，而是带分母运算，相消后所得方程的分母中若仍含未知数，再去分母。例如卷六第十五问："或问南门外不知步数有树，甲从乾东行三百二十步而立，乙出西门便南行，望树及甲与城参相直，却就树斜行二百五十五步至树。问答同前。"

按本题草，设圆城半径为 x，则

$$x=a_6，又 c_6=255，a_1=320$$

因为　$\triangle_1\backsim\triangle_6$

所以　$c_1=\frac{a_1\cdot c_6}{a_6}=\frac{31\ 600}{x}$

因为　$a_{11}=320-2x$，

$$b_1=c_1-a_{11}=2x-320+\frac{81\ 600}{x},$$

$$b_{10}=b_1-2x=-320+\frac{81\ 600}{x},$$

所以　$r^2=\frac{1}{2}a_{11}\cdot b_{10}$

$$=320x-132\ 800+\frac{13\ 056\ 000}{x}$$

又　$r^2=x^2$

所以　$x^2=320x-132\ 800+\frac{13\ 056\ 000}{x}$

相消并去分母，得

$$-x^3+320x^2-132\ 800x+13\ 056\ 000=0（下略）$$

再如卷七第十问，得到两个等值多项式

$$81x^2-17\,766x+1\,397\,529-\frac{46\,428\,480}{x}+\frac{553\,190\,400}{x^2}$$

和

$$18x^2-1\,974x+61\,201$$

后，相消并去分母，得

$$63x^4-15\,792x^3+1\,336\,328x^2-46\,428\,480x+553\,190\,400=0$$

从以上二例可以看出，若方程分母是天元幂的形式，且最高次数为 m，则各项便提高 m 次。这种去分母的方法与现在完全一致，相当于用次数最高的分母同乘方程各项。

第四，李冶已懂得用代数方法降低方程次数，当方程各项含有公因子 x^n 时，李冶便令次数最低的项为实，其他各项均降低这一次数，因此相消后的方程总以最下层为实，以上一层则高一次。李冶这一做法，相当于用 x^n 去除方程各项，从而降低方程次数。例如卷五第十四问，相消后本应得方程

$$-4x^5+3\,600x^4-1\,256\,400x^3+105\,840\,000x^2=0$$

但李冶给出的天元式却相当于

$$-4x^3+3\,600x^2-1\,256\,400x+105\,840\,000=0$$

由于李冶摆脱了几何思维的束缚，布列方程及方程变形就自由多了。同天元术研究的先驱相比，思维及运算大为简化。

例如卷七第二问："或问丙出南门直行一百三十五步而立，甲出东门直行一十六步见之。问答同前。"即 $b_{14}=135$，$a_{15}=16$，求 d。在《测圆海镜》中，这是比较简单的一道题，但如果对天元术不熟，主要靠几何方法解题，思维过程就会十分复杂。

按书中转载的《钤经》草，设 $x=c_{14}-a_{14}$，则

$$c_{14}+a_{14}=\frac{b_{14}^2}{x}=\frac{18\,225}{x}$$

$$2a_{14}=c_{14}+a_{14}-x=\frac{18\ 225}{x}-x$$

$$2a_{14}\cdot b_{14}=-135x+\frac{2\ 460\ 375}{x}$$

所以 $d=\frac{2a_{14}\cdot b_{14}}{c_{14}-a_{14}}$（勾外容圆半公式）

$$=\frac{1}{x}\left(-135x+\frac{2\ 460\ 375}{x}\right)$$

$$=-135+\frac{2\ 460\ 375}{x^2}$$

因为　$\triangle_{14}\backsim\triangle_{15}$，

所以　$b_{15}=\frac{2a_{15}\cdot b_{14}}{2a_{14}}=\frac{4\ 320}{2a_{14}}$（寄母）

$$2a_{15}\cdot b_{15}=\frac{2a_{15}\cdot 2a_{15}\cdot b_{14}}{2a_{14}}$$

$$=\frac{138\ 240}{2a_{14}}$$（寄母）

因为　$d_{14}=b_{14}-(c_{14}-a_{14})=135-x$

所以 $d_{14}^2=(a_{14}+b_{14}-c_{14})^2$

$$=2(c_{14}-a_{14})(c_{14}-b_{14})$$

$$=x^2-270x+18\ 225$$

$$2(c_{14}-b_{14})=\frac{2(c_{14}-a_{14})(c_{14}-b_{14})}{x}$$

$$=x-270+\frac{18\ 225}{x}$$

而　$c_{15}-b_{15}=\frac{2(c_{14}-b_{14})\cdot b_{15}}{2b_{14}}$

$$=\frac{\left(x-270+\frac{18\ 225}{x}\right)\cdot\frac{4\ 320}{2a_{14}}}{2\times 135}$$

$$=\frac{16x-4\ 320+\frac{291\ 600}{x}}{2a_{14}}$$（寄母）

所以 $d=\dfrac{2a_{15}\cdot b_{15}}{c_{15}-b_{15}}$（股外容圆公式）

$$=\frac{138\ 240}{2a_{14}}\cdot\frac{2a_{14}}{16x-4\ 320+\dfrac{291\ 600}{x}}$$

$$=\frac{138\ 240}{16x-4\ 320+\dfrac{291\ 600}{x}}\text{（寄母）。} \tag{1}$$

同数$=\left(-135+\dfrac{2\ 460\ 375}{x^2}\right)\left(16x-4\ 320+\dfrac{291\ 600}{x}\right)$

$$=-2\ 160x+583\ 200-\frac{10\ 628\ 820\ 000}{x^2}+\frac{717\ 445\ 350\ 000}{x^3} \tag{2}$$

由（1）、（2）消得

$$-2\ 160x+444\ 960-\frac{10\ 628\ 820\ 000}{x^2}+\frac{717\ 445\ 350\ 000}{x^3}=0$$

各项乘以 x^3，得

$$-2\ 160x^4+444\ 960x^3-10\ 628\ 820\ 000x+717\ 445\ 350\ 000=0$$

解方程，得

$$x=81=c_{14}-a_{14}$$

代入公式

$$d=\frac{[b_{14}^2-(c_{14}-a_{14})^2]\cdot b_{14}}{(c_{14}-a_{14})^2} \tag{3}$$

得 $d=240$

李冶认为，(3) 式由勾外容圆半公式$\dfrac{2a_{14}\cdot b_{14}}{c_{14}-a_{14}}$的分子、分母同乘 $c_{14}-a_{14}$得到，即

$$\frac{2a_{14}\cdot b_{14}(c_{14}-a_{14})}{(c_{14}-a_{14})^2}$$

$$=\frac{\left[\frac{b_{14}^2}{c_{14}-a_{14}}-(c_{14}-a_{14})\right]\cdot b_{14}(c_{14}-a_{14})}{(c_{14}-a_{14})^2}$$

$$=\frac{\left[b_{14}^2-(c_{14}-a_{14})^2\right]\cdot b_{14}}{(c_{14}-a_{14})^2}$$

按李冶草，设圆城半径为 x，则

$$b_{12}=x+b_{14}=x+135,$$

$$a_{12}=x+a_{15}=x+16,$$

$$a_{12}\cdot b_{12}=x^2+151x+2\ 160.$$

所以 $c_{12}=\frac{a_{12}\cdot b_{12}}{x}$（勾股上容圆公式）

$$=x+151+\frac{2\ 160}{x},$$

$$c_{12}^2=x^2+302x+27\ 121+\frac{652\ 320}{x}+\frac{4\ 665\ 600}{x^2}. \quad (1)$$

同数 $=a_{12}^2+b_{12}^2=2x^2+302x+18\ 481,$ (2)

由（1）、（2）消得

$$-x^2+8\ 640+\frac{652\ 320}{x}+\frac{4\ 665\ 600}{x^2}=0$$

各项乘以 x^2，得

$$-x^4+8\ 640x^2+652\ 320x+4\ 665\ 600=0$$

解方程，得

$$x=120$$

所以 $d=2\times120=240$

以上二法的繁简是一目了然的。《钤经》解法虽然也用了天元术，但思维方法基本上是几何的，只是由于 $c_{14}-a_{14}$ 难于用几何方法得到，才使用天元术，因此过程繁琐。类似的例子还见于卷十一第十八问，该题二法，洞渊法“宛转费力”，李冶法“迳捷明白。方元前术，极为省易。”

三、先进的数学符号

在《测圆海镜》中，李冶采用了从○到九的完整数码。除○以外的数码古已有之，是筹式的反映。但筹式中遇零空位，没有符号○。中国古书有以□表示缺字的习惯，符号○大概由此演化而来。我们很难判断○是谁发明的。但从现存古算书来看，李冶的《测圆海镜》与秦九韶《数书九章》是最早使用○的两本算书，它们成书的时间相差不过一年。在《测圆海镜》中，○的作用有二，一是表示数中空位，空几位就写几个○，二是表示天元式中系数为○的项。例如，13 056 000 记为|≡○||||⊥○○○，方程 $-414x^2+478\ 584=0$（卷八第二问）记为图 2.2.6 的形式。

书中还使用了先进的小数记法。在李冶之前，小数记法往往与数名相连，如 7.598 75 尺记作七尺五寸九分八厘七毫五丝。李冶则取消数名，完全用数码表示小数，纯小数于个位处写○，带小数于个位数下写单位，如 0.25 记作○=||||，5.76 记作 ||||⊥T（下注"步"）。这种记法，在当时算是相当简明的。直到 16 世纪，西方的小数记法还很笨重。例如比利时数学家斯蒂文（S．Stevin）在 1585 年出版的《论十进》（De Thiende）中，把每位小数都写上位数，画上圆圈，如 27.847 写作 27⓪8①4②7③，0.54 记作 5①4②，这种记法显然不如李冶的记法简便。直到 17 世纪纳皮尔（J．Napier）发明小数点后，小数才有了更好的记法。

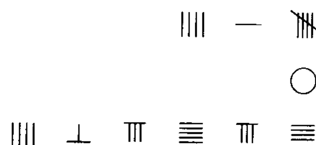


图 2.2.6

负号的发明是李冶在数学上的另一成就。虽然在《九章算术》里已有负数的明确概念，但那时没有负号，数的正负是用算

筹的不同颜色或摆法的斜、正来区别的。在《数书九章》里，秦九韶在负数下写一“益”字，以示区别。李冶在《测圆海镜》中首先使用负号，这种负号与现在不同，是画在数字上的一条斜线，通常画在最后一位有效数字上，如用丨⊥𝍤表示　−175，用|||⊥

○　表示−360，用○⊥𝍤表示−0.75，等等。在国外，负号是德国人于 15 世纪首先引入的。

由于李冶掌握了一套完整的数字符号及性质符号，他的方程便可以用符号表示，从而改变了用文字描述方程的旧面貌。但仍缺少运算符号，没有加、减、乘、除号及等号。这样的代数，可称为半符号代数，它是近代符号代数的前身。大约 300 年后，类似的半符号代数也在欧洲产生。“天元一”虽是文字形式，但它是代表各种未知数的一般的、抽象的文字，在本质上也可看作符号。另外，李冶在圆城图式中以一般性文字代表三角形顶点，与西方用字母表示几何点的作法类似。三角形天地乾与三角形 *ABC* 并无本质区别，只不过西方文字最小单位为字母，便以字母表示顶点；而汉字最小单位是字，便以字表示顶点罢了。

四、《测圆海镜》的不足之处

由于时代的局限和李冶的疏忽,《测圆海镜》也存在某些不足。

1. 书中各方程的未知数都表示线段长度，所以李冶只考虑方程的正根；而每一线段的长度是唯一的，所以李冶不考虑方程的多根。换句话，对于任何方程，李冶都是只求出一个正根。

2. 识别杂记 692 条定理中，已发现 9 处程度不同的差错[①]。不过，其中的一些可能属于传抄者或出版者弄错的。

3. 各题的“法”中，实（常数项）的正负不明确。李冶对于

---

① 参见《测圆海镜细草》李锐案及孔国平. 李冶传. 石家庄：河北教育出版社，1988. 89～90

方、廉、隅各项，负则加"益"或"虚"字，但实前则不加这两字，这就容易给人一种"实常为正"的错觉。实际上，从题草所得方程来看，实可正可负，毫无限制。但究竟是正是负，则要经过演算才知道，难于在法中判明。

4. 术语不够统一。有时，一个概念用不同的词表示，如益和虚都表示负，从、方或从方都表示方程的一次项，常法、隅法或隅都表示方程的最高次项。有时，同一个词又表示不同的概念，如"实"既可表示被除数或分子，又可表示被开方数，还可表示方程的常数项；"虚积"有时指太虚勾股形的面积（见"诸杂名目"），有时指虚勾、虚股的乘积（即太虚勾股形面积的二倍，如卷七第一题）；"减"字后的数有时是被减数（如卷九上第一题"下位减共步"），有时是减数（同题"下位减二之少步"）。遇到这种情况，读者只能根据上下文来辨明词义。

5. 书中个别题的推算有误。卷三第十七问中的 $a_{11}+b_2=2(b_1-a_1)$，卷四第十七问中的 $b_{10}+a_3=2(b_1-a_1)$，卷九下第六问中的 $c_{10}-c_{11}=c_{13}+c_8$，这几式都与"今问正数"偶合，不满足普遍性，李冶却当作定理来用了。卷十一第五问的"又法"，所得为 a_{10}，李冶当作城径，似为一时的疏忽。

五、《测圆海镜》的影响

《测圆海镜》的成书标志着天元术成熟。不久以后，王恂、郭守敬在编《授时历》时，便用天元术求周天弧度，沙克什则用天元术解决水利工程中的问题，都收到良好效果。天元术逐渐成为解决实际问题的有力工具。元代数学家朱世杰曾说："以天元演之，明源活法，省功数倍。" 清代阮元（1764～1849）说："立天元者，自古算家之秘术，而海镜者，中土数学之宝书也。"[①] 这些评价并

---

① 李冶．测圆海镜细草．《知不足斋丛书》本．1798．阮元序．

不过分。以《测圆海镜》为代表的天元术理论，对后世数学的影响确实很大。李冶死后不久，天元术经二元术、三元术，迅速发展为四元术。如果说在李冶手中，天元术已成长为枝叶繁茂的大树，那么在李冶身后，这棵大树在第二代数学家培育下，则结出了四元术的累累硕果。

在世界数学史上，《测圆海镜》也是不可多得的珍品。它是当时世界上水平最高的代数著作。不过，由于它没有及时地传到西方，所以没有对西方国家的数学发展产生影响。直到 20 世纪初，西方学者才开始从数学史的角度来研究这部中世纪的名著。

第三节 《测圆海镜》的版本及流传

元、明、清三代，《测圆海镜》多次再版，但实际上，天元术在明代已经失传。唐顺之虽抄过《测圆海镜》，顾应祥甚至对书中题目重新分类，写成《测圆海镜分类释术》，但他们连“天元一”是什么意思都没看懂，所以顾应祥删掉原书细草，改用几何方法演题。明末清初，西方初等数学传入中国后，梅珏成（1681～1763）认识到西人借根方（当时称西方的方程理论为借根方）即古之天元术，并在《赤水遗珍》一书中详加阐述，湮没 300 余年的天元术这才复明于世，流传开来。

乾隆三十八年（1773 年），政府设立四库全书馆，李潢（？～1811）所藏《测圆海镜》12 卷被略加校勘后收入《四库全书》。因这套书只有 7 个抄本，流传不广，阮元便从文澜阁《四库全书》中抄得《测圆海镜》一部，于嘉庆二年（1797 年）嘱李锐（1768～1817）重校一遍。同年，鲍廷博把李锐校本刻入《知不足斋丛书》。此后《测圆海镜》版本渐多，但基本上以李锐校本为准。

天元术在清朝重新流传，引起了数学界的极大兴趣。早在《四库全书》成书（1787 年）之前，孔广森（1752～1786）便对

《测圆海镜》作了不少批校。到1785年，批校已及一、二、三、七各卷。但他第二年便去世了。批校工作没有完成，已作的批校也迟迟没有印出，所以影响不大[①]。

1861年，朝鲜数学家南秉哲发表《海镜细草解》，这是第一部对《测圆海镜》进行详细解释的书，比中国的同类算书还早。1873年，张楚钟发表《测圆海镜识别详解》，书中首次对“识别杂记”几百条定理逐条证明，方法皆是几何的，文字通俗易懂。1896年出版的刘岳云《测圆海镜通释》，采用一般方法叙述原书中各类问题解法，而不用具体数字。他发现圆城图式中各勾股形的边长之间有简单的加减关系，于是列出“诸率加减表。”1898年出版的叶耀元《测圆海镜解》和王泽沛《测圆海镜细草通释》开始采用近代数学符号。此外，李善兰、陈维祺、王季同等数学家在对《测圆海镜》的研究中都取得重要成果。

以《测圆海镜》为代表的天元术的流传与发展，到清末告一段落。民国初年以后，国内外对《测圆海镜》的出版和研究主要是从数学史角度进行的。

现以图表形式将近年来对《测圆海镜》各版本及其嬗递关系的考证结果公布如下。表中的北图、分馆、科院、科史、北大、北师、首师、内师，分别是北京图书馆、北京图书馆分馆、中国科学院图书馆、中国科学院自然科学史研究所、北京大学图书馆、北京师范大学图书馆、首都师范大学图书馆、内蒙古师范大学图书馆的简称；馆案是《四库全书》馆案语的简称。

---

① 孔广森的《测圆海镜批校》，直到1934年才被李俨整理出版，载《北京图书馆馆刊》3～4月号.

《测圆海镜》各版简况表

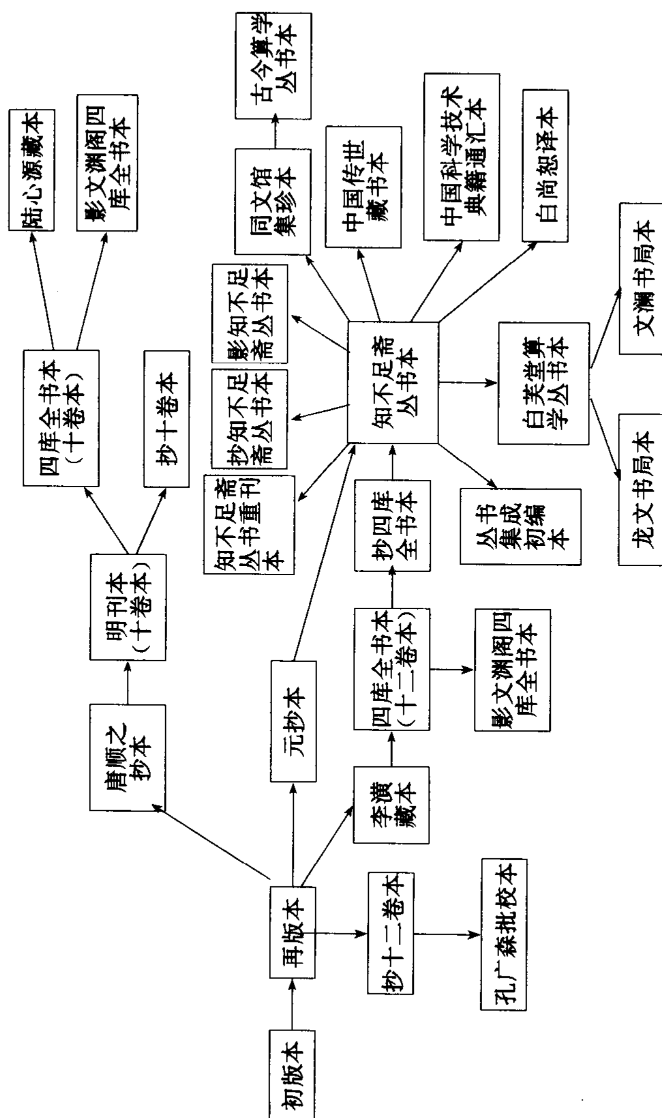
版本	书名	卷数	册数	出书时间	出版或抄写者	校对	方式	特点	现存何处
初版本	测圆海镜	12	不详	1282	不详		雕版	有1248年李冶序	已佚
再版本	测圆海镜	12	不详	1287	李克修		雕版	有李冶序，至元二十四年（1287）王德渊后序	已佚
元抄本（丁杰藏本）	测圆海镜细草	12	2	元代	不详		手抄	有李冶序，王德渊后序；第一册书侧写有“元抄本”；两册中均有“金华宋氏景濂”①、丁杰之印”等图章	北图
抄十二卷本	测圆海镜细草	12	4	不详	不详		手抄	有李冶序、王德渊后序。正文与北图藏元抄本同，但第一册内有朱笔批校。	科院
孔广森批校本	测圆海镜	12	4	不详	不详	孔广森	手抄	第一、二、三、七卷内共有孔广森批校27条。	已佚
唐顺之抄本	测圆海镜	12	不详	16世纪	唐顺之		手抄	有李冶序、王德渊后序。	已佚
明刊本	测圆海镜分类释术	10	不详	1550	顾应祥		雕版	有顾应祥释术，无识别杂记，无草。	已佚

① 据梅荣照考证，宋氏景濂即宋濂（1310～1381），见《李冶及其数学著作》，载《宋元数学史论文集》．北京：科学出版社，1966

版本	书名	卷数	册数	出书时间	出版或抄写者	校对	方式	特点	现存何处
抄十卷本	测圆海镜分类释术	10	2	清初	不详		手抄	有顾应祥释术，无识别杂记，无草。有沐朝弼序。各卷首题"……李冶撰，明都察院右副都御史吴兴顾应祥释术"。	北大北图
陆心源藏本	测圆海镜分类释术	10	8	清代	朱丝栏		手抄	有顾应祥释术，无识别杂记，无草。首叶有图章"光绪戊子湖州陆心源捐送国子监之书匮藏南学。"各卷首题"元李冶原本，明顾应祥释术"。	分馆
李潢藏本	测圆海镜	12	不详	不详	不详		不详	有李冶序、王德渊后序。	已佚
四库全书本	测圆海镜	12	4	1784	戴震	四库全书馆	手抄	有四库全书提要、李冶序、王德渊后序，正文有馆案。	北图
四库全书本	测圆海镜分类释术	10	2	1784	戴震	四库全书馆	手抄	同明刊本	北图
抄四库全书本	测圆海镜	12	不详	约1787～1796	阮元		手抄	同四库全书本	已佚
知不足斋丛书本(第二十函)	测圆海镜细草	12	4	1798	鲍廷博	李锐	雕版	有嘉庆三年（1798）阮元序、李冶序、王德渊后序、嘉庆二年（1797）李锐跋；正文有馆案、李锐案。	内师分馆北师北大科史李迪

版本	书名	卷数	册数	出书时间	出版或抄写者	校对	方式	特点	现存何处
抄知不足斋丛书本	测圆海镜细草	12	5	不详	不详		手抄	1～4册抄于原书，有李冶序、王德渊后序、李锐跋；第5册是部分题目的多项式乘法细草。	李迪
知不足斋丛书重刊本	测圆海镜	12	4	清末	不详		雕版	同知不足斋丛书本	科院
白芙堂算学丛书本	测圆海镜细草	12	3	1874	丁取忠	黄宗宪	雕版	有阮元序、李冶序、四库全书提要；正文有馆案、李锐案。	内师 科院
同文馆集珍本	测圆海镜	12	4	1876	丁冠西	杜法孟等	木活字	有四库全书提要、阮元序、光绪丙子（1876）李善兰序、李冶序、王德渊后序、李锐跋；正文有馆案、李锐案。	分馆 科史 李迪
古今算学丛书本	测圆海镜	12	3	1898	刘铎	张南薰	石印	有四库全书提要、李冶序、阮元序、李善兰序、王德渊后序、李锐跋；正文有馆案、李锐案。	北师 科史
影知不足斋丛书本	测圆海镜细草	12	4	1921	上海古书流通处		影印	同知不足斋丛书本	科院 北大 北师
丛书集成初编本	测圆海镜细草	12	2	1935	商务印书馆		铅印	有阮元序、李冶序、王德渊后序、李锐跋；正文有馆案、李锐案。	北图 北师 内师 首师

版本	书名	卷数	册数	出书时间	出版或抄写者	校对	方式	特　点	现存何处
影文渊阁四库全书本	测圆海镜	12	1	1983	台湾商务印书馆		影印	同四库全书本	北图科图
影文渊阁四库全书本	测圆海镜分类释术	10	1	1983	台湾商务印书馆		影印	同四库全书本	北图科图
白尚恕译本	测圆海镜今译	12	1	1985	山东教育出版社	钟善基	铅印	原文与译文对照，译文采用现代数学符号。	各图书馆
中国科学技术典籍通汇本	测圆海镜	12	1	1993	河南教育出版社		影印	据知不足斋丛书本影印，有孔国平提要。	各图书馆
中国传世藏书本	测圆海镜	12	1	1996	海南出版社	孔国平	铅印	以知不足斋丛书本为底本进行校勘和标点，各卷末有孔国平校记。	各图书馆


《测圆海镜》流传路线图
初版本
再版本
抄十二卷本
孔广森批校本
李潢藏本
元抄本
唐顺之抄本
明刊本（十卷本）
四库全书本（十卷本）
抄十卷本
陆心源藏本
影文渊阁四库全书本
四库全书本（十二卷本）
影文渊阁四库全书本
抄四库全书本
知不足斋丛书本
知不足斋丛书重刊本
抄知不足斋丛书本
影知不足斋丛书本
同文馆集珍本
古今算学丛书本
中国传世藏书本
中国科学技术典籍通汇本
白尚恕译本
丛书集成初编本
白芙堂算学丛书本
文澜书局本
龙文书局本

第三章 《益古演段》

第一节 《益古演段》内容分析

一、书名和体例

《益古演段》的“益古”二字，无疑取自《益古集》。演是推演的意思，段是条段的简称。因为方程各项常用一段段的条形面积表示，故称之为条段。益古演段，即在《益古集》的基础上，以天元术推演条段。

《益古演段》全书64题。处理的主要是平面图形的面积问题，所求多为圆径、方边、周长之类。除4道题是一次方程外，全是二次方程问题，内容安排基本上从易到难。卷上二十二问，内容不超出正方形与圆；卷中二十问，把正方形推广为长方形；卷下二十二问，图形的位置关系比较复杂一些。李冶在完成《测圆海镜》之后写《益古演段》，他对天元术的运用自然会更加熟练。但他却没有像前者那样，完全用天元术解题。书中新、旧二术并列，新术是李冶的代数方法——天元术；旧术是蒋周的几何方法——条段法，这是一种通过面积图形的分割、拼补来寻找等量关系，以便求得方程各项系数的图解法。

《益古演段》各题包括“法”、“依条段求之”、“条段图”、“义”四部分。法即天元术，依条段求之即用人们易懂的几何方法对天元术进行解释，图为方程各项几何关系的图解，义即图的文字说明。除这4部分外，有23题包含旧术，即《益古集》中的方法。这些旧术有一个共同特点，实（常数项）常为正。

下面以第八问为例，说明《益古演段》的解题方法。

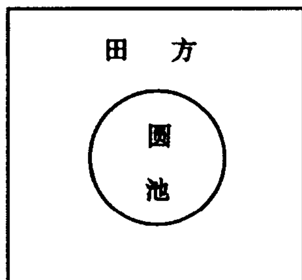


图 2.3.1

“今有方田一段，内有圆池水占之，外有地一十三亩七分半。只云内外方圆周共相和，得三百步。问方圆周各多少？（见图 2.3.1）答曰外方周二百四十步，内圆周六十步。

“法曰：立天元一为圆径，以三之为圆周，以减共步，得 $\begin{array}{l}300\ \text{太}\\ -3\end{array}$ 为方周。以自增乘，得 $\begin{array}{l}90000\ \text{太}\\ -1800\\ 9\end{array}$ 为十六段方田积于头，再立天元圆径，以自之，又十二之，得 $\begin{array}{l}0\ \text{太}\\ 0\\ 12\end{array}$ 为十六个圆池积，以减头位，得 $\begin{array}{l}90000\ \text{太}\\ -1800\\ -3\end{array}$ 为十六段如积[①]，寄左。然后列真积[②]一十三亩七分半，以亩法[③]通之，得三千三百步。又就分母一十六通之，得五万二千八百步。与左相消，得 $\begin{array}{l}37200\\ -1800\\ -3\end{array}$。开平方得一十二步，为圆池径。又三之，为圆周也。”

“依条段求之，和步幂内减十六之见积为实，六之和步为从，三步常法。

① 如积，含有未知数并与真积相乘的面积表达式.

② 真积，已知的面积，亦称“见积”.

③ 按当时亩法，一亩为二百四十（平方）步.

“又曰：十六个圆池，该十二个方。内从步合除去九个方外，犹剩三个方，故以三步为常法也。

“旧术曰：列相和步自乘为头位，又以十六之田积减头位，又六而一，为实。以相和步为从法，廉常置五分。”

书中的天元式，以最上一层为常数项，标“太”字，下面依次为一次项、二次项系数。这种顺序与《测圆海镜》恰好相反。李冶进行这种改变，是为了使天元式与开方式一致。因为列出方程总是要开方的，所以《益古演段》中的形式用起来更为方便。

依“法”演算，设圆径为 x，则圆周为 $3x$（取 $\pi \doteq 3$），方周为 $300-3x$。所以，　16 段方田积

$$=(300-3x)^2=90\ 000-1\ 800x+9x^2, \tag{1}$$

$$16 \text{ 个圆池积}=12x^2, \tag{2}$$

$$16 \text{ 段如积}=(1)-(2)$$

$$=90\ 000-1\ 800x-3x^2 \tag{3}$$

而　　真积 $=13.75\times 240=3\ 300$，

$$16 \text{ 段真积}=3\ 300\times 16=52\ 800 \tag{4}$$

由（3）与（4）得

$$90\ 000-1\ 800x-3x^2=52\ 800$$

相消，得

$$37\ 200-1\ 800x-3x^2=0$$

解方程，得

$$x=20$$

所以，　圆周 $=3x=60$

依条段求之，则

$$3x^2+6\times 300x=300^2-16\times 3\ 300$$

从图 2.3.2 可以看出，实即没有阴影的图形面积，恰好等于 $3x^2+6\times 300x$。由于 16 个圆池面积为 $12x^2$，而 6 个共从中只有 9 个 x^2，所以须加 3 个 x^2（图中 3 个写“方”的正方形），才能与实

图 2.3.2

（斜线和数码为笔者所加）

相等。这便是“义”所阐述的大义。

按旧术列式，为

$$0.5x^2+300x=\frac{300^2-16\times 3\ 300}{6}$$

二、题的核心部分——法

《益古演段》的解题过程虽然包括四到五部分，但其中的核心部分是法。它表明李冶建立方程的思路，分为立天元一、找等值多项式和相消三步，尤以第二步为关键。下面以第三十六问为例，说明李冶是如何找等值多项式的。

“今有圆田一段，中心有直池水占之，外计地六千步。只云从内池四角斜至四楞各一十七步半，其内池长阔共相和，得八十五步。问三事各多少?”（见图 2.3.3）

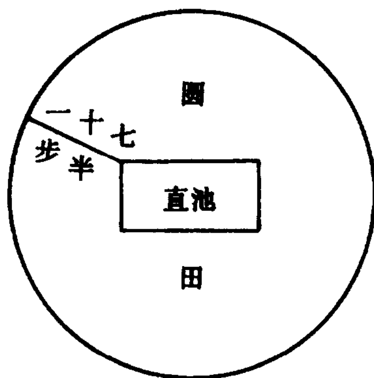


图 2.3.3

依法演算，设内池斜（即对角线）为 x，则

外圆径 $=x+35$，

四圆积 $=3\ (x+35)^2$

$=3x^2+210x+3\ 675$

四池积

$=3x^2+210x+3\ 675-4\times 6\ 000$

$=3x^2+210x-20\ 325$ (1)

因为 四积一较[①] 幂 $=85^2=7\ 225$

二积一较幂 $=x^2$

所以 二池积 $=7\ 225-x^2$

四池积 $=2\ (7\ 225-x^2)$

$=14\ 450-2x^2$ (2)

由（1）、（2）消得

$5x^2+210x-34\ 775=0$（下略）

从上面的演算过程可以清楚地看到，所谓等值多项式即表示同一面积的两个多项式，此题的同一面积为四池积。（1）式所得甚易，（2）式的由来则凭借以下两个公式：$(a+b)^2=4ab+\ (a-b)^2$ 和 $a^2+b^2=2ab+\ (a-b)^2$。前者是四积一较幂，后者是二积一较幂，书中利用几何方法对这两个公式进行了证明。第三十二问

① 此处的“较”指长方形的长、阔之差.

中证明了四积一较幂公式（见图 2.3.4，图中池长 a 阔 b），第三十四问中证明了二积一较幂公式（见图 2.3.5，图中四勾股形全等，每个勾股形勾 b 股 a 弦 c）。

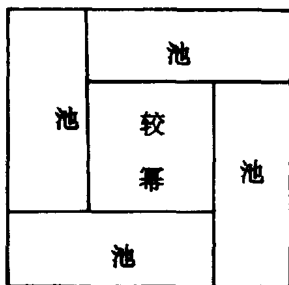


图 2.3.4

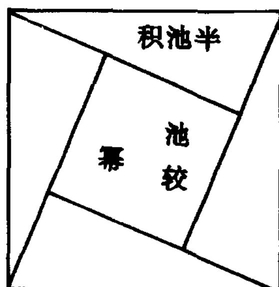


图 2.3.5

除了上述两个公式外，各题的法中还应用了正方形、长方形、梯形、环形等各种图形的面积公式。值得注意的是《益古演段》中的圆面积公式，虽然该公式在实质上与现在无异，但由于李冶在题中使用的圆周率不同，就出现了 3 个圆面积公式。按古率，圆面积 $S=\frac{3}{4}d^2$；按徽率，$S=\frac{157}{200}d^2$；按密率，$S=\frac{11}{14}d^2$①。不难验证，这些公式都是正确的。为了计算方便，书中多用古率，因为本书重点在于列方程而不是进行近似值计算。

如果我们把 64 题全部的法浏览一遍，还会发现这样一个现象：尽管在推导方程时，多项式的系数随时可能出现分数或无理数，但所得方程的系数全是整数或有限小数。这当然是解方程的需要，但李冶并不是像现在这样，建立方程后再去分母或有理化，而

① 取圆周率为 3，称古率；取圆周率为 $\frac{157}{50}$，称徽率，此率为刘徽所得；取圆周率为 $\frac{22}{7}$ 称密率，实际是祖冲之的“约率”.

是在推导方程的过程中设法避免分数和无理数。这种作法是由中国筹算的特点决定的。用筹摆一个分数，不仅比摆整数麻烦，而且由于没分数线，在天元式中很容易把分数与整数弄混。至于无理数，就更不好用算筹表示了。如果随时化无理数为有理数，化分数为小数，就可以避免这些麻烦。

例如第二十九问："今有方、圆田各一段，共计积一千四百四十三步。只云圆周大于方周，方圆周并得一百九十八步。问二周各多少?"（见图 2.3.6）

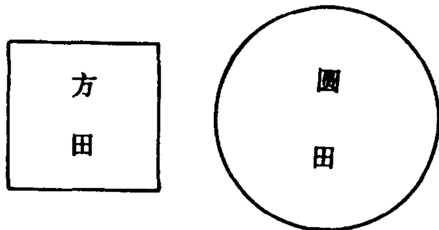


图 2.3.6

依本题法，设方周为 x，则圆周为 $198-x$。以圆积加方积得真积 1 443，所以应列方程

$$\frac{(198-x)^2}{12}+\left(\frac{x}{4}\right)^2=1\ 443$$ ①

但法中并未出现此式，李冶取 12 与 16 的最小公倍数 48，算出 48 个圆积和 48 个方积，真积也相应地扩大到原来的 48 倍。这样，所得方程为

$$4(198-x)^2+3x^2=48\times 1\ 443$$

便不含分母了。

又如第五十问："今有方田一段，内有小方池结角占之，外计地九千三百七十五步，只云从外方角至内池面各五十七步半，问内外方各多少?"（见图 2.3.7）

依本题法，设内方面为 x，则外田斜（对角线）$=115+x$。从

① 圆面积 $S=\frac{C^2}{12}$（其中 C 为周长）可由 $S=\frac{3}{4}d^2$ 推出.

外田积减去内池积为真积 9 375，所以应列方程

$$\left(\frac{115+x}{\sqrt{2}}\right)^2-x^2=9\ 375$$

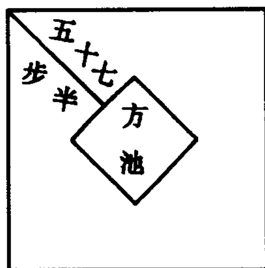


图 2.3.7

但法中也未出现此式。李冶先算出以外田斜为边的新的正方形面积——展方积，它是外田积的 1.96 倍（取$\sqrt{2}\doteq 1.4$），然后把内池积和真积也相应扩大到原来的 1.96 倍。这样，所得方程为

$$(115+x)^2-1.96x^2=9\ 375\times1.96$$

便不含无理数了。

第二节　条段法与天元术

《益古演段》表明，宋元数学经历了一个从条段法到天元术的发展历程。

一、条段法是几何方法

《益古演段》中的旧术，只给出求方程各项系数的算式而无列方程的过程。这些算式究竟是由天元术得到的，还是由几何方法得到的？应该是后者。第一，李冶在序言中说，《益古集》以"方圆移补成编"，可见旧术是借助图形的拼补来建立方程。第二，若按天元术列方程，"相消"后便把方程两边的等值多项式合到一起，变为一边为零的形式。这样，实可正可负。但旧术方程中，实常为正。可见蒋周未摆脱几何的束缚，认为实的意义仅仅是面积，不能为负。按这种几何方法，首先要寻求题中各量的几何意义，画出条段图（即方程各项的图解），因此可称之为条段法。

例如第二十二问："今有方田一段，其西北隅被斜水占之，外

计地一千二百一十二步七分半，只云从田东南楞至水楞四十五步半。问：田方面多少?”(见图 2.3.8)“旧术曰：列田积于头位，又列至步除四，则直至步；以自乘，减头位，余为实。二之直至为从，以九分六厘为廉，减从，开平方，得二步半。加直至步三十二步半，得三十五步，即田方面也。”

图 2.3.9 为旧术条段图，它由四部分组成，其面积分别为 S_1，S_2，S_3，S_4，而所求方面又可分为两段：a——直至步，b——直至不及方面步。欲求方面，须先求出 a，b。(1) 是正方形，其对角线已知，按方五斜七之率，把正方形之边长定为 10 个单位，则对角线为 14 个单位。因此，除去对角线比边长多出的 4 个单位，便可得边长 a。这就是旧术所说：“列至步除四，则直至步。” a^2 即

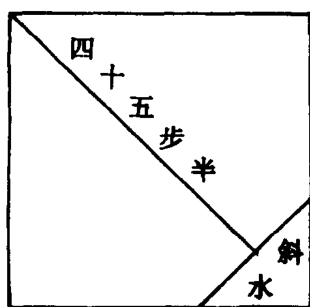


图 2.3.8

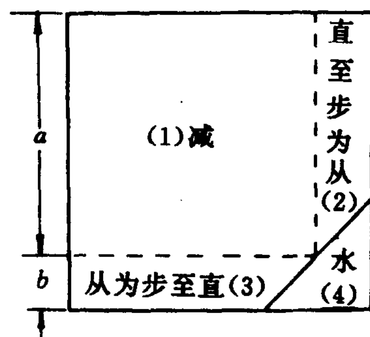


图 2.3.9

S_1，从田积 1 212.75 减去 S_1，则为 S_2+S_3，以 a 为长 b 为阔的两个长方形面积之和为 $2ab$，它比 S_2+S_3 多出 S。这 S 是多少呢?令小方表示以 b 为边的正方形，则 S_4 等于以小方对角线为边的正方形面积，它是小方面积的 1.96 倍，所以 S 为 $0.96b^2$。这就是说，$2ab-0.96b^2=S_2+S_3$，在求出 a 和 S_2+S_3 后，便可开方求 b 了。以

上是根据旧术及条段图对蒋周思路的推测。按旧术列式，则

$$45.5-45.5\times\frac{4}{14}=32.5$$

$$-0.96b^2+2\times32.5b=1\ 212.75-32.5^2$$

开方，得

$$b=2.5,$$

所以　田方面$=2.5+32.5=35$。

很明显，虽然旧术也建立了方程，但却没有设未知数（即立天元一）的步骤，思维方法基本上是几何的。

第五十六问可以进一步说明旧术是几何方法："今有圆田一段，内有圆池水占之，外计地二十三亩一分，只云从外田通内池径六十三步。"问内外周、径各多少？旧术又法："并通步自之，又十一之，于上；以十四之积减上，余为实，四十四之通步为法，见池径。"

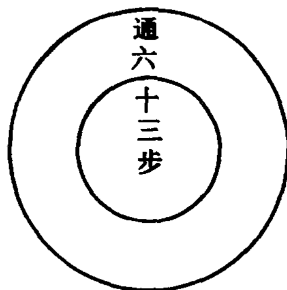


图 2.3.10

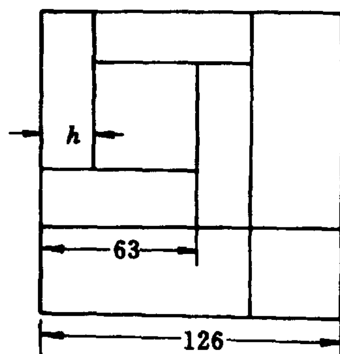


图 2.3.11

如图 2.3.10，令 S_1，S_2 分别表示大圆、小圆面积，d 表示小

圆直径，h 表示实径[①]。根据旧术及条段图，推测蒋周演算过程如下：

$$S_1-S_2$$
$$=\frac{11}{14}(63+h)^2-\frac{11}{14}(63-h)^2$$
$$=23.1\times 240=5\,544$$

所以 $11\left[(63+h)^2-(63-h)^2\right]$

$$=14\times 5\,544$$

即 $11(4\times 63h)=14\times 5\,544$

所以 $h=\frac{14\times 5\,544}{44\times 63}$

$$d=63-h=\frac{63\times 44\times 63-14\times 5\,544}{44\times 63}$$

即 $d=\frac{11(63+63)^2-14\times 5\,544}{44\times 63}$

本题条段图所体现的化圆为方的思想，是中国传统的几何思想。因为长方形是最基本的几何图形，其面积公式可以作为公理，所以把曲边图形化为长方形后，是便于理解面积问题的。

二、从条段法到天元术

条段法的基础是出入相补原理，其渊源可追溯到刘徽和赵爽。《九章算术》卷九第十六问对勾股容圆公式的证明，以及赵爽在《勾股圆方图》中对勾股定理的证明，都是运用出入相补原理的实例。

当人们把出入相补原理用于列方程时，条段法便诞生了。北宋刘益在《议古根源》中，已能比较熟练地运用条段法了。

例如："直田积八百六十四步，只云长阔共六十步，问：长多

① 在《益古演段》中，两个同心圆的大圆半径在小圆外的部分，称为实径.（若圆内正方形与圆同心，则称与正方形之边平行的半径在正方形外的部分为实径.）

阔几何？……和自乘，有四段直田积，一段差方积，所以用四积减和方，余得差方一段，却取方面。”① 我们令 a 为长，b 为阔，则可把此题解法表示如下：

$$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$$
$$=60^2-4\times864$$

所以　$(a-b)=12$

图 2.3.12 向我们展示了出入相补原理在解题中的作用。式中的 $(a-b)$ 实际就是未知数，只是刘益的未知数概念还不明确。

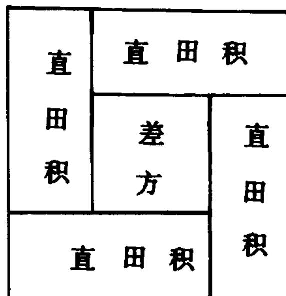


图 2.3.12

条段法发展到蒋周时代，已达到比较完善的程度。从《益古演段》旧术来看，凡可用平面图形表示的二次方程问题，都可用条段法来解决。但条段法也有明显的局限性。首先，由于没有设未知数的步骤，不是把未知数用统一符号表示出来，再去寻找它和已知量的关系，而是在解题过程中去找含有所求量的等式，这便增加了思维的复杂性。其次，条段法只能列出二次方程，因为高于二次的方程很难用面积来表示。数学的发展，迫切需要一种简便的、可以建立高次方程的一般方法，天元术便应运而生了。

蒋周并非天元术的发明者，但他为天元术的诞生创造了条件，因为他懂得寻找含有所求量的等值多项式并把它们连为方程。可以说，在《益古集》这个数学园地里，已经能看到天元术的曙光了。

如第八问（见本章第一节），依旧术术文推测，蒋周建立方程

① 转引自（宋）杨辉．田亩比类乘除捷法．《丛书集成初编》本．1939．43

的思路如下（令方积为S_1，圆积为S_2，圆径为d，方周为C）：

因为 $S_1-S_2=13.75\times240=3\ 300$

而 $S_1=(\frac{C}{4})^2=\frac{C^2}{16}$， $S_2=\frac{3}{4}d^2$

所以 $16S_1-16S_2$

$=C^2-12d^2=(300-3d)^2-12d^2$

$=-3d^2-6\times300d+300^2$

又 $16S_1-16S_2=16\times3\ 300$

所以 $-3d^2-6\times300d+300^2=16\times3\ 300$

即 $0.5d^2+300d=\frac{300^2-16\times3\ 300}{6}$

其中$-3d^2-6\times300d+300^2$及$16\times3\ 300$便是等值多项式，它们都等于$16S_1-16S_2$，且含有未知数，所以可连为方程。不过，两个多项式中的一个是常数。

引人注目的是，第三十三题旧术中的两个等值多项式均含未知数。该题为："今有圆田一段，中心有直池水占之，外计地七千三百步。只云并内池长阔，少田径五十五步，阔不及长三十五步。问：三事（指池长、池阔、圆径）各多少？"（图 2.3.13）令圆径为d，直池长a，阔b，圆积S_1，田积S_2，池积S，则蒋周建立方程的思路如下：

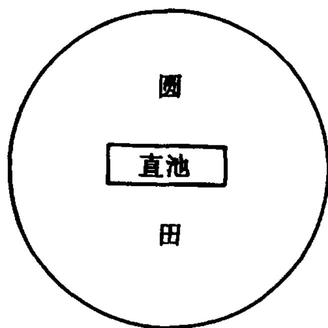


图 2.3.13

由于 $S_1-S_2=S$ 而 $S_1=\frac{3}{4}d^2$，$S_2=7\ 300$ 易得

$$3d^2-4\times7\ 300=4S \quad (1)$$

这便得到一个等于$4S$的多项式，下面再设法得到等于$4S$的另一多项式。因为$d-55=a+b$，所以

$$(d-55)^2=(a+b)^2$$
$$=4ab+(a-b)^2=4S+35^2$$

即　$(d-55)^2-35^2=4S$　(2)

把两个等于 $4S$ 的多项式连起来，便得方程

$$3d^2-4\times 7\ 300=(d-55)^2-35^2。$$

(1) 式和 (2) 式中的 $4S$ 并非所求，蒋周只是通过它得到两个等值多项式，在建立方程时便把它消掉了。这种思想是天元术中不可缺少的。

从上面的推测可以看出，除了没有设未知数的步骤以外，蒋周的方法已和天元术相当接近了。如果我们认真比较一下各题的新、旧二术，很容易发现天元术是由条段法发展而来的。

实际上，在《益古演段》的新术中，条段思想也发挥了重要作用。书中多次使用的四积一较幂及二积一较幂公式，李冶都是用面积公式得到的。《益古演段》表明，天元术是产生于条段法并包含条段法的普遍方法。它的产生是从特殊到一般、从具体到抽象的飞跃。

三、用条段法证明天元术

《益古演段》中的“依条段求之”，与旧术的意义不同，它实际是用条段法证明天元术。本来，用天元术建立方程是无须证明的。但在天元术诞生不久之时，许多人对这种抽象的数学方法不理解，若能采取直观手段，用几何方法把方程系数构造出来，天元术的正确性就无可怀疑了。这样做是便于普及天元术的。李冶说：“余犹恨其（指《益古集》）阏匿而不尽发，遂再为移补条段，细缫图式。”[①] 蒋周的方法之所以显得“阏匿”，就在于他那时没有天元术，他是以条段法推导方程的。而李冶在掌握天元术之后再

① 李冶．益古演段序．《丛书集成初编》本．1936

回顾条段法，便有高屋建瓴之势。各题的天元术在前，“依条段求之”在后，其作用不是推导方程，而是验证方程。正如书中案语所说：“条段皆于立天元一内取出。”

例如第四十七题：“今有直田一段，中心有小方池结角占之，外计地二千七十九步，只云从田二头至池角二十一步半，两边至池角七步半。问：三事（指直田长、阔及池方）各多少？”（图 2.3.14）

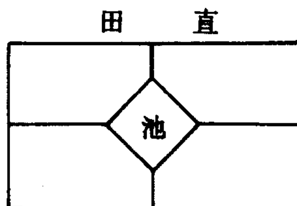


图 2.3.14

依本题法，设内方面为 x，则

田长$=1.4x$[①] $+43$

田阔$=1.4x+15$

直田积$=(1.4x+43)(1.4x+15)$

$=1.96x^2+81.2x+645$

所以　$1.96x^2+81.2x+645-x^2=2\ 079$

即　$$-0.96x^2-81.2x+1434=0 \qquad (1)$$

李冶在导出方程后写道：“依条段求之，积步内减四段边至与头至步相乘数，为实。并边至头至步倍之，又身外加四，为从。九分六厘常法。”并画条段图如图 2.3.15。

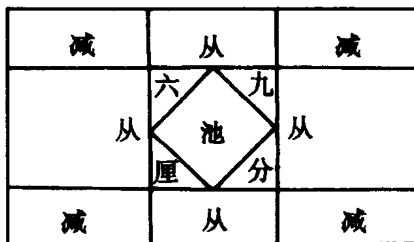


图 2.3.15

把李冶的话译成现代数学语言，即

① 取方五斜七之率，即$\sqrt{2}\doteq1.4$.

2 079－4×21.5×7.5

为常数；

1.4x（21.5＋7.5）×2 为一次项；0.96x^2 为二次项。

从图中可以看出，一次项即写“从”的 4 个长方形，二次项即写“九分六厘”的 4 个勾股形，一次项与二次项相加，恰为“外计地”减去写“减”字的 4 个长方形所得面积。方程

$$0.96x^2+1.4x(21.5+7.5)\times 2$$
$$=2\ 079-4\times 21.5\times 7.5$$

化简后显然与方程（1）完全相同，这便起到了证明天元术所得方程的作用。

《益古演段》新旧二术并列，即使人们看到二者的联系，更使人们看到新术的优越性。首先，由于有了立天元一的明确步骤和列方程的固定程序，使思维和运算简便多了。其次，由于摆脱了几何思维的束缚，实可正可负，方程变形更加自由了。还可以根据题目需要，灵活选取未知数。《益古演段》使读者体会到：条段法比较直观，但复杂多变，需要较多技巧；天元术比较抽象，但方法是一般的，思维过程简单。当人们不熟悉天元术时，可以借助条段法来理解天元术，但当人们具有一定的抽象能力，掌握了天元术以后，它的优越性就充分显示出来了。许多用条段法难于解决的问题，用天元术解起来易如反掌，而且省去画图的麻烦。《益古演段》说明对于数学界完成从条段法到天元术的过渡有着重要意义，这正是作者的苦心所在。

第三节　数学理论的创新

《益古演段》虽是一部普及天元术的著作，但在理论上也有创新，主要表现在化多元问题为一元问题的思想以及设辅助未知数的方法。

一、化多元问题为一元问题

《益古演段》中的问题同《测圆海镜》不同，所求量不是1个，而是2个，3个甚至4个。按古代方程理论“二物者再程，三物者三程，皆如物数程之”[①]，应该用方程组来解，所含方程个数与所求量个数一致。但解二次方程组要比解一元方程困难得多。李冶既已完善了天元术程序，便力图提高它的一般化程度，用以解决各种多元问题。他的主要方法是利用出入相补原理及等量关系来减少未知数，化多元为一元，找到关键的天元一。一旦这个天元一求出来，其他要求的量便可根据与天元一的关系，很容易求出来。

例如第三十三问：“今有圆田一段，中心有直池水占之，外计地七千三百步。只云并内池长阔少田径五十五步，阔不及长三十五步。问：三事各多少？”（见图2.3.13）

若用方程组来解，应列出三个方程。一个可能的列法是：设圆径为x，池长为y，池阔为z，则

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x^2-yz=7\ 300, \\ y+z=x-55, \\ z+35=y。\end{cases}$$

但李冶却设法避免了方程组。下面，我们按李冶方法演算。设外圆径为x，则外圆积$=0.75x^2$，

所以　内池积$=0.75x^2-7\ 300$

　　　四池积$=3x^2-29\ 200$　　　(1)

因为　池长阔和$=x-55$

所以　四池一较幂

① 刘徽注：九章算术．载钱宝琮校点《算经十书》．北京：中华书局，1963．221

$= (x-55)^2$

$= x^2-110x+3\ 025$　　(2)

四池积 $= x^2-110x+3\ 025-35^2$

$= x^2-110x+1\ 800$　　(3)

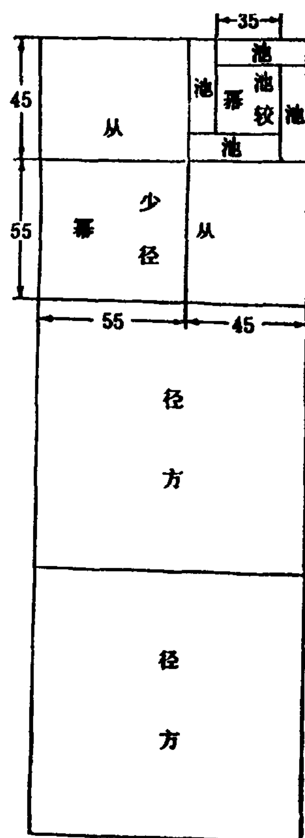


图 2.3.16

(图中数码为笔者所加)

由 (1)、(3) 消得

$$2x^2+110x-31\ 000=0$$

显然，(2) 式中用 $(x-55)^2$ (即长阔之和的平方)表示四积一较幂，便是巧妙地运用了出入相补原理。这相当于

$$(a+b)^2=4ab+(a-b)^2,$$

从条段图 (图 2.3.16) 可以看到这一点，用代数方法也很容易验证。当 $a+b$ (长阔和) 与 $a-b$ (长阔差) 已知时，$4ab$ (四池积) 当然很好求。题中长阔和为 $x-55$，差为 35，故四池积为 $(x-55)^2-35^2$，它与 (1) 式共同构成表示同一面积的等值多项式。另外，图 2.3.16 还表现了化圆为方的思想，$4\times\frac{3}{4}x^2=3x^2$ 表示 4 个圆面积，但它相当于 3 个“径方”，即 3 个以径 x 为边长的正方形面积。该图清楚地表明了方程各项的关系，见下式：

$$\underbrace{3x^2-x^2}_{\text{两个径方}}+\underbrace{2\times 55x}_{\text{从}}-\underbrace{55^2}_{\text{少径幂}}+\underbrace{35^2}_{\text{池较幂}}=\underbrace{29\ 200}_{\text{四见积（四圆减四池）}}$$

求出圆径 x 以后，直池长阔便容易求了。“内减少径，即水池和步。内加一差，即为二长；若减一差，即为二阔也。”

再如第三十五问：“今有圆田一段，中心有直池水占之，外计地五千七百六十步。只云从外田东南楞至内池西北角，通斜一百一十三步，其内池阔不及长三十四步。问：三事（指池长、池阔及圆径）各多少？”（见图 2.3.17）

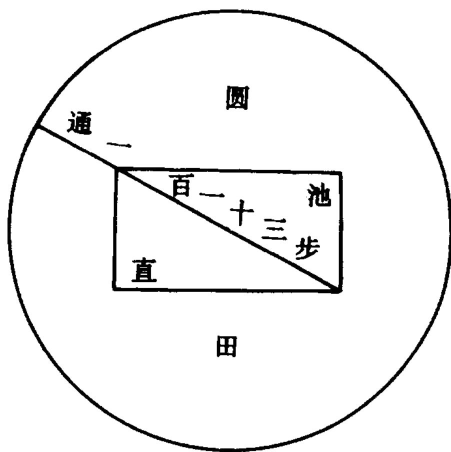


图 2.3.17

此题欲求三数，若以方程组解之，须列出 3 个方程，一个可能的列法是：

设圆径为 x，直池长为 y，阔为 z，则

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}x^2-yz=5\ 760 \text{（圆面积}=\dfrac{3}{4}\text{直径}^2\text{）} \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{y^2+z^2}}{2}=113 \\ z+34=y \end{cases}$$

题中也是利用出入相补原理来减少未知数个数而避免联立方程

的。

依本题法，设角斜为 x，则

$$圆径=x+113$$

$$四圆积=3(x+113)^2=3x^2+678x+38\ 307$$

所以　$四池积=四圆积-4\times5\ 760=3x^2+678x+15\ 267 \quad (1)$

因为　$池斜=113-x$

所以　$二池积=(113-x)^2-34^2 \quad (2)$

$$=x^2-226x+11\ 613$$

$$四池积=2x^2-452x+23\ 226 \quad (3)$$

由（1）、（3）消得

$$x^2+1\ 130x-7\ 959=0$$

题中（2）式所用二积一较幂公式 $2ab+(a-b)^2=a^2+b^2$ 便体现了出入相补原理（见图2.3.5）。求出角斜后，易求圆径。从圆积减去外计地，得池积。由长方形面积公式便可求出池长、池阔了。这种方法显然比解三元方程组简便。

书中第十九问利用线段和差关系把各种要求的量联系起来，也达到了减少未知数的目的。

原题为："今有圆田一段，内有方池水占之，外计地三十三亩一百七十六步。只云内外周与实径共相和，得六百二步。问：三事各多少？（见图2.3.18）

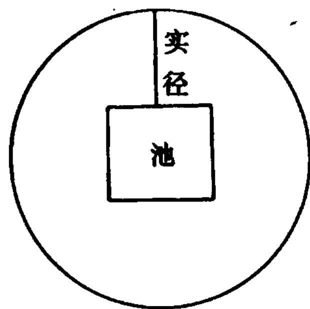


图2.3.18

依本题法，设内方面为 x，则外田径 $=172-x$。这便把两个要求的量联在一起，减少了一个未知数。根据李冶的注释，上式的证明过

程大致如下：

由已知，内周＋外周＋实径＝602

即 4 方面＋3 圆径＋实径＝602

因为 602×2＝1 204

＝8 方面＋6 圆径＋2 实径

又 因为 方面＋2 实径＝圆径

所以 1 204＝7 方面＋7 圆径

所以 方面＋圆径＝$\frac{1\ 204}{7}$＝172

即 圆径＝172－方面

在《益古演段》中，李冶化多元问题为一元问题的努力是成功的。若由题直接列方程，含有 3 个未知数的题就要列出三元方程组，里面还常常有两个二次方程（或能化为二次方程的无理方程）。消去一个未知数后，变为二元二次方程组，解起来还是相当麻烦的。但李冶利用出入相补、化圆为方、线段和差等方法寻找等量关系，很容易地把未知数减为一个，列出简单的一元二次方程。各题中“法”的文字虽也不少，但那是为了初学者的方便，作者才不厌其烦地逐步推演的。对于熟练掌握天元术的人，计算步骤可以大为简化。

二、连枝同体术与之分术

李冶在第四十问中首创设辅助未知数的方法。原题为：“今有直田一段，中心有圆池水占之，外计地四亩五十三步。只云外田长平[①] 和得七十六步太半[②] 步，从田四角去池楞各十八步。问：外田、水池径各多少？(如图 2.3.19)。在这一题的法中，李冶提出

① 平即阔.

② 太半即$\frac{2}{3}$.

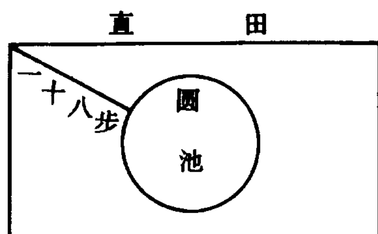


图 2.3.19

了两种新方法，从而在天元术理论上取得进展。

依法演算，设池径为 x，则直田斜 $=x+36$，

田斜幂（即二积一较幂）

$$=(x+36)^2=x^2+72x+1\ 296$$

九段田斜幂 $=9(x+36)^2$

$$=9x^2+648x+11\ 664 \tag{1}$$

又　九段和幂（即三十六直积九个较幂）

$$=9\left(76\frac{2}{3}\right)^2=52\ 900 \tag{2}$$

圆积 $=0.75x^2$

一段直积 $=0.75x^2+(4\times240+53)$

$$=0.75x^2+1\ 013$$

十八段直积 $=13.5x^2+18\ 234$ (3)

(2)－(3)，得

$$-13.5x^2+34\ 666 \tag{4}$$

亦为九段田斜幂。由（1）、（4）消得

$$-22.5x^2-648x+23\ 002=0 \tag{5}$$

作题至此，方法与各题无异。但李冶得到（5）式后说：“合以平方开之，今不可开。”这是因为直接对（5）式开方，不能得到有

限小数。同时，由于二次项系数较大，开方运算较繁。于是，他采取了设辅助未知数的新方法："先以隅法二十二步半，乘实二万三千单二步，得五十一万七千五百四十五步正，为实。元从六百四十八负，依旧为从，一益隅。平方开之，得四百六十五步。以元隅二十二步半约之，得二十步三分之二，为内池径也。"把这段文字译为今文，即

设 $y=22.5x$，则（5）式变为

$$-y^2-648y+517\ 545=0 \tag{6}$$

开方，得

$$y=465$$

所以 $$x=\frac{465}{22.5}=20\frac{2}{3}$$

显然，由于（6）式的二次项系数绝对值为 1，开方是比较方便的。

李冶把这种设辅助未知数的方法称为"连枝同体术"。顾名思义，他是把辅助未知数看作与原方程连为一体的一个分支。李冶的方法相当于：对方程

$$ax^2+bx+c=0$$

设 $x=\frac{y}{a}$，则原方程化为

$$y^2+by+ac=0$$

这种通过等量代换产生新未知数的思想，增加了未知数的代数色彩，为方程变形提供了一个有力工具。

此题的另一种解法是首先"立天元一为三个内池径"，这相当于设 $y=3x$。李冶称此法为"之分术"，实际也是一种设辅助未知数的方法，也能起到简化方程的作用。依法演算，得

$$-2.5y^2-216y+23\ 002=0$$

两种方法的区别在于：之分术把设辅助未知数的步骤放于题首，而连枝同体术把这一步骤用于方程变形。

第四节 《益古演段》评述

在13世纪，《益古演段》一书可以说是普及天元术的杰作。它把代数与几何相结合，直观与抽象相结合，而且是图文并茂，不仅利于教学，也便于自学。该书的一个显著特点是深入浅出，正如砚坚序中所说："说之详，非若溟涬黯黮之不可晓；析之明，非若浅近粗俗之无足观。""颇晓十百，披而览之，如登坦途，前无滞碍。"《益古演段》的这些特点，使它成为一本受人们欢迎的数学教材，对于天元术的传播发挥了不小的作用。同时，书中设辅助未知数的方法及化多元问题为一元问题的思想，进一步发展了天元术理论，为天元术的应用开辟了更为广阔的道路。它与《测圆海镜》相辅相成，反映了作者既努力提高数学的一般化程度，又注意发挥其社会效益的精神。在当时，它成为"学者之指南"；在后世，它成为数学家用天元术研究几何问题的模式。清代张敦仁仿《益古演段》作《缉古算经细草》，便是一例。

《益古演段》的价值不仅表现在数学本身，还表现在保存数学史料上。在现存中国古算书中，《益古演段》对于条段法的记述最为详尽。它反映了代数史上从条段法向天元术过渡的历史时期，这对于我们了解中国古代数学的来龙去脉，探讨数学发展的规律，无疑具有重要意义。

另外，《益古演段》对于今天的中学数学教育具有借鉴价值，尤其是作者对方程进行几何解释的方法，甚至可以直接用于教学。许多中学生刚刚接触代数方程，特别是二次方程时，感到难于理解。在根据实际问题列方程时，更是无从下手。只用二项式定理、配方法等代数工具，往往达不到"启蒙"的目的。若教师能适当利用几何图形来解释方程，对抽象能力还不强的初中学生是有益的。待学生对方程的代数意义充分理解之后，再用纯代数方法讨

论方程，就会事半功倍。教师可对《益古演段》中的题目进行去粗取精的选择，吸收出入相补原理这一中国几何的特色，作为教学的辅助资料。

《益古演段》也存在一些缺点和局限性。由于书中的未知数都表示长度，而每一长度是唯一的，所以李冶只考虑方程的单根、正根。该书同《测圆海镜》一样，没有运算符号。这些都是时代的局限。《益古演段》本身的缺点有以下几条：

第一，李冶把边长为1的方斜幂写为1.96而不写作2，这说明他是由$\sqrt{2}\doteq1.4$推出$(\sqrt{2})^2=1.96$的，他没有采用$(\sqrt{2})^2=2$。本来，熟知勾股定理的李冶，是应该懂得边长为1的方斜幂$=$（边长$1)^2+$（边长$1)^2=2$的，但他沿袭方五斜七的旧率，结果是弃简从繁，去精取粗。

第二，个别题的通分工作没有做好。第四十三问中，对4个分母依次为14，200，4，175的分数，本应取最小公倍数1 400作公分母，但李冶算得前三数的最小公倍数1 400后，又乘以175，以乘积245 000作公分母，这就过于烦琐了。

第三，个别题的几何解释比较牵强。如第五十六问中，李冶把一个长方形分为两个小长方形，分别表示作为实（常数项）的14个真积，以及作为一次项的7个内外周长之和与天元(实径)的乘积。这种解释对于读者理解方程并没什么帮助，连李冶自己都说："此问难以为式，强立此式以推之。"其实，此题的几何解释并不难，后人把《益古演段》编入《四库全书》时，根据化圆为方的思想补画了一个条段图，就比较恰当地对方程作了几何解释。

第四，从《益古演段》的序言来看，尽管李冶对普及先进数学成果的重要性有充分认识，但他却嘲笑那些写给一般农民和商贩看的简易数学读物，说这是使数学"尽堕于市井沾沾之儿，及夫荒村下里蚩蚩之民，殊可悯悼。"这种态度是不对的。实际上，有学术价值的著作固然重要，启蒙式的浅显读物也是不可缺少的。

李冶希望他的书“使粗知十百者，便得入室啖其文。”试想，若没有为初学算术者而编的内容浅显的数学书，没有启蒙教学，那李冶所要求的“粗知十百”从何而来呢？

总的来说，《益古演段》的这些缺点与成就相比，只能算是白璧微瑕。《益古演段》与《测圆海镜》互为表里，相得益彰，都是13世纪的优秀数学著作，是中国古代数学的宝贵遗产。

综上所述可见，李冶在数学上做出了重要贡献，而在其后的五六百年间，虽然有人进行过研究，但是可以说是淹没不彰。到18世纪末，逐渐引起人们的注意，特别是对《测圆海镜》进行了大量研究，出版了不少有关著作。约于19世纪初，《测圆海镜》传到了朝鲜，朝鲜数学家南秉哲写了一部《海镜细草解》，刊印传世。到本世纪初，人们则从数学史的角度进行研究，李俨撰有长文“测圆海镜研究历程考”[①]。国外对李冶的研究应首推法国汉学家赫师慎(Ven Hee)，他早在1913年就发表了有关李冶的论文[②]。后来，美国科学史家萨顿（G. Sarton，1884～1956）在他的著作中列有“李冶”(Li Yeh)，并评价说：李冶“中国数学家；他的时代和他的国家的最伟大数学家之一”[③]。1973年美国的多卷本科学家传记辞典中有“李冶”条[④]。1982年，法国的林力娜（K. Chemla）以对《测圆海镜》的研究论文获得博士学位[⑤]。20世纪

① 李俨. 测圆海镜研究历程考. 载《中算史论丛》第四集. 北京：科学出版社，1955. 32～237

② L. Ven. Hee. Li Ye, Mathématicien Chinois du Ⅷ siecle. Toung Pao (14)：1913. 537～568

③ G. Sarton. Introduction to the History of Seience. Ⅰ. Washington：1927. 627～628

④ Ho Peng-Yoke. Li Chih (also called Li Yeh), Dictionary of Scientific Biography Ⅷ, 1973. 316～318

⑤ K. Chemla. Edude du livre《Reflets des mesures du cercle sur la mer》de Li Ye. 1982. L'University de Paris Ⅶ.

80 年代以来，国内研究也比较活跃。1985 年，孔国平的硕士学位论文为《李冶传》[①]，后来他发表了好几篇论文，1997 年他又出版了《测圆海镜导读》。1985 年，白尚恕的《测圆海镜今译》问世。对于《益古演段》的研究，相对来说少些。1984 年，新加坡的蓝丽蓉（Lam Lay－Yong）和马来西亚的洪天赐（Ang tian－se）联名发表了一篇很长的有关论文，并对该书给予了较高评价[②]。1992 年 7 月 25～31 日，在中国呼和浩特召开"第二届汉字文化圈数学史与数学教育国际学术讨论会"时，同时举行了"李冶诞生 800 周年纪念会"，紧接着于 8 月 2 日在李冶的家乡栾城县又召开了一个纪念会，规模较大，还有一个李冶陈列室同时开放。在这两次纪念会上，沈康身（2 次）、白尚恕（2 次）、方镇华、魏保华、林力娜（2 次）、孔国平（2 次）、李迪（2 次）等都作了有关李冶的学术报告[③]。近年，在《刘徽评传》中做为合传之一把"李冶评传"列入[④]。上述事实说明，李冶已成为国际公认的中国古代数学家。

---

① 孔国平．李冶传．石家庄：河北教育出版社，1988

② Lam Lay－Yong & Ang Tian－Se. Li Ye and His《Yi gu yan duan》. Archive for History of Exact Sciences. 1984，29（3）：237～266（中译文载《科学史译丛》1985（3）和 1985（4））

③ 所有报告都收入《数学史研究文集》第五辑．呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1993．104～176

④ 周瀚光，孔国平．刘徽评传．南京：南京大学出版社，1984．91～163（周瀚光执笔）

第　三　编

蒙古与元初的官方历算学

本编讲述由蒙古兴起大约到元成宗大德时，约100年间（1206～1307）与蒙古·元官方有直接关系的历算学。从年代上看，与第一编的一部分、第二编的全部相重合。但是为了前后的衔接，只能这样安排。

第一章　蒙古与元初的中外历算交流

本章从成吉思汗西征起，中经蒙古太宗窝阔台（在位1229～1241）、太宗后（在位1242～1245）、定宗贵由及其后（在位1246～1250）、宪宗蒙哥（在位1251～1260），直到世祖忽必烈（在位1260～1294）的前20年（到至元十五年，1278年）止，半个多世纪。由于中外交通大开，和窝阔台、蒙哥多次西征，中外人士往来增多，使中外历算交流的机会也自然多起来。

第一节　成吉思汗西征与耶律楚材历算学

1219年，成吉思汗大军西征西域，耶律楚材随行。

耶律楚材（1189～1244）字晋卿，号湛然居士，辽东丹王突欲八世孙。他的父亲就是本卷第一编所讲到的耶律履。耶律楚材

早年在金的燕京行省为员外郎，1215 年蒙古兵取燕，耶律楚材遂在家闲居。1218 年他应成吉思汗召，到成吉思汗帐下，并得到信任。1219 年蒙古大军西征，耶律楚材做为高级参谋随行到中国西部及中亚，1224 年又随大军东归。他在西域停留了五六年。1231 年升为中书令。1244 年，耶律楚材去世，谥文正。

耶律楚材 3 岁丧父，在母亲杨氏培养教育下渡过少年时代，“稍长知力学，十七，书无所不读，为文有作者气。”① 后来他成为知识渊博的学者和有作为的政治家。他的自然科学基础很好，因此能够很快接受新的知识，而且能有所创造，在中外历算交流方面作出了应有的贡献。

他在西域期间，到过寻思干、塔剌思、蒲华、苦盏城等许多中亚地方。对于当地的情况，耶律楚材多所了解，写了大量的诗表达中亚一带的风土人情和对国内的一些思念，回国以后写了一部《西游录》，对在西域的一些见闻进行追述。特别重要的是，他掌握了当地所行用的历法。后人对他的学术研究有一段总结性的记述：

“公…笃于好学，不舍昼夜。常诫诸子曰：公务虽多，昼则属官，夜则属私，亦可学也。其学务为该恰，凡星历、医卜、杂算、内算、音律、儒释、异国之书，无不通究。尝言西域历，五星密于中国，乃作麻答肥② 历，盖回鹘历名也。又以日食躔度（西域）与中国不同，以《大明历》浸差故也，乃定文献公所著《乙未元历》行于世。”③

这里所说与历算有关的内容有三项：首先是耶律楚材精通数学，所谓“杂算”应是指普通数学，包括日常生活中的计算问题、

① ［元］宋子贞．中书令耶律公神道碑．载《元文类》卷 57．

② “肥”，陶宗仪在《辍耕录》卷 9 作“巴”．

③ ［元］宋子贞．中书令耶律公神道碑．《元文类》卷 57．

商业贸易中的计算问题、税收仓储和土木工程中的计算问题以及数学理论，有时称为“外算”。所谓“内算”系指包括天文历法中的计算问题和星占、算命等有关的计算问题在内的数学[1]。由引文可知，耶律楚材的数学知识相当广泛。又据记载：“初，国朝未有历学，而回鹘人奏：五月望夕月食，公言不食，及期果不食。明年公奏：十月望夜月食，回鹘人言不食，其夜月食八分。”[2] 这表明：耶律楚材在交食计算方面有很高水平。

其次，是在上面的引文中多次提到“回鹘人”。回鹘本是中国古代西北部的游牧民族，原来叫韦纥，唐代中期改称回鹘，以后又分散，大部分居住在中国，一部分则迁到葱岭西楚河一带（位于中亚东部）。实际上就是现在的维吾尔族的前身。但是，在引文中的“回鹘人”是泛指西域人，而且主要是指中亚居民。当时中亚的天文历法和数学属于伊斯兰系统。大约10世纪起，伊斯兰系统的学者们大量翻译古希腊的科学著作，同时对翻译作品加注、改编，并自己独立撰写书籍，因此耶律楚材所作“回鹘历”无疑是伊斯兰系统的历法，是他在西域期间所掌握。至于《麻答肥历》的“麻答肥”是何义，尚未见有明确解释，很可能是西域某民族语言的语音，而未译成中国的汉文。他作这一工作的动机是因为“西域历，五星密于中国”，当时西域所用历法，大约也不是一种，而且各地也不一定行用同一种历法。由于耶律楚材著作早已失传，也就无法深究了。但无论如何都说明，13世纪初由耶律楚材把伊斯兰系统的历法传进了中国。

最后是由于当时北方行用的金《大明历》出现误差，而在其父耶律履（文献公）《乙未历》基础上造新历。这段说法中说“乃定文献公所著《乙未元历》行于世”，不符合史实。真正的情况是：

---

① [宋] 秦九韶. 数书九章・序. 1247.

② [元] 宋子贞. 中书令耶律公神道碑.《元文类》卷57.

“元初承用金《大明历》，庚辰岁，太祖西征，五月望，月食不效；二月、五月朔，微见于西南。中书令耶律楚材以《大明历》后天，乃损节气之分，减周天之秒，去交终之率，治月转之余，课两曜之先后，调五行之出没，以正《大明历》之失。且以中元庚午岁，国兵南伐，而天下略定，推上元庚午岁天正十一月壬戌朔，子正冬至，日月合璧，五星联珠，同会虚宿大度，以应太祖受命之符。又以西域、中原地里殊远，创为里差以增损之，虽东西万里，不复差忒。遂题其名曰《西征庚午元历》，表上之，然不果颁用。”①

《庚午元历》保存了下来②，经近人研究知系修改《大明历》而来，“惟里差之法，是其特创。实开后世经度之先。”③

在现存《庚午元历》中有三处提到“加减里差”，而在另一处“求朔弦望中日”中给出了计算步骤④。所谓“朔弦望中日”是指月亮的朔、上弦、下弦和望时太阳上中天时刻。由于东西地理位置的不同，所以上中天时刻各地也不相同。如果知道东西两地间的距离和规定其中一地为标准，那么另一地时刻即可算出。耶律楚材以寻思干（今乌兹别克斯坦共和国的撒马尔罕）为中心考虑向东向西相距的里程，计算另一地时刻，即

“以寻思干城为准，置相去地里，以四千三百五十九乘之，退位，万约为分，曰里差；以加减经朔弦望小余，满与不足，进退大余，即中朔弦望日及余。[以东加之，以西减之]。”

这和现在的地方时相近，在日历变更线以西的地方，东边早，西边晚。以寻思干正午为准，其东为下午，其西为上午，在时间

① 《元史》卷52“历志一”.

② 《元史》，卷56“庚午元历上”、卷57“庚午元历下”.

③ 朱文鑫. 历法通志. 上海：商务印书馆，1934. 208

④ 《元史》卷56“庚午元历上”.

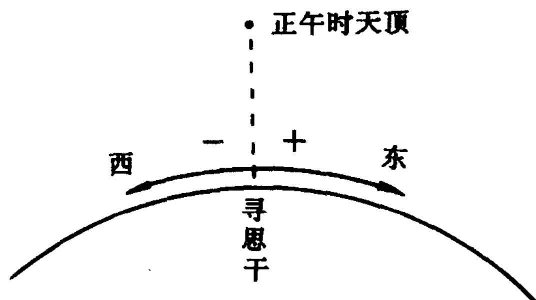


图 3.1.1　里差示意

上东加西减（如图 3.1.1 所示）。设 m 代表寻思干与以东（或以西）相距之里程，里差为 t，则有

$$t=\frac{4\ 359}{10\ 000}m$$ ①

其中 m 的单位是当时所用的中国里，即每隔一里所产生的里差的改正量为 0.043 59 分，亦即 t 为时间的改正量，它与时间小余加减以后，再经计算可得相距为 m 里（只能是正东或正西）处的时刻。

第二节　西方与中亚历算家的东来

成吉思汗西征是蒙古军的第一次远征。过了 12 年，窝阔台第二次派军西征，由 1237 年起到 1241 年他去世乃止，第二年撤军。第二次西征已到达俄罗斯、匈牙利等国家，深入到欧洲腹地。

由于这次西征使西方各国感到震惊，因而也就不断派使节和

---

① 陈久金. 回回天文学史研究. 南宁：广西科学技术出版社，1996. 72

商人东来。第一个使节团是教皇英诺森四世（Innocent IV，? ～1254）派遣的两位葡萄牙基督教会士加宾尼（John of Plano Carpini）和劳伦斯（Lawrence），他们于1245年出发经过千辛万苦，于1246年夏天在哈剌和林（今蒙古人民共和国乌兰巴托）附近谒见了蒙古大汗贵由。1247年，使节团回到了欧洲。加宾尼回到欧洲后写了一本题为《蒙古史》的书，流传至今[①]。这书原是向教皇英诺森四世写的报告。

另一个重要的使节团由四个人组成，他们是两名方济各修士鲁不鲁乞（William of Rubruck）和克里莫纳人巴塞洛缪（Bartholomew of Cremona），以及另外二人。他们于1253年初从欧洲启程，第二年1月蒙哥汗接见了他们，以后还多次接见。在中国呆了约5个月，但是到1255年才回到欧洲。鲁不鲁乞写有《鲁不鲁乞东游记》一书[②]。

当时到蒙古王廷的外国人较多，而且就在上面提到的两本书中，特别是《鲁不鲁乞东游记》有较多的反映。在蒙哥的宫庭里有日耳曼人，匈牙利人，俄罗斯人，甚至有印度人等，实际上还有欧洲其他国家来的人。

蒙哥是个很迷信的统治者，在他周围有一批占卜者。“正如蒙哥汗所承认的，他们的占卜者是他们的教士。占卜者命令做的任何事情，统统要立即执行，毫不迟延。……占卜者们人数很多，并且总是有一个首领，像是一个主教。”很重要的是占卜者中有些精通天文学：

“他们之中有些人熟悉天文学，特别是他们的首领，他们预言日蚀和月蚀的时间。当日蚀或月蚀将发生时，所有的人们都贮藏

---

①② 这两部书是英国人道森（C. Dawson）在温加尔特所编印原文的基础上编译入《出使蒙古记》中，由吕浦译为中文．于1983年由中国社会科学出版社出版，以下所引均出自此译本．

食物，以便届时不需走出家门。在日蚀或月蚀的时间里，他们打鼓并吹打乐器，使之发出巨大的嘈杂声和噪音。占卜者们宣布有利于或不利于进行各种事情的日子。因此，除非他们同意，蒙古人从来不进行军事演习或出发作战。如果不是占卜者们不允许，他们早就回到匈牙利去了。”[①]

可是鲁不鲁乞没有举出一个熟悉天文学的占卜者的名字。当时确实有天文学家在蒙哥或他前代的身边，至少有 2 人是人们知道的，他们是爱薛和札马鲁丁。

爱薛（Isa，1227～1308），西域拂林[②] 人，祖父名巴阿喇，父亲博啰穆苏。他何时来到中国，不见记载，而在定宗贵由时他已在中国。爱薛“于西域诸国语、星历、医药无不研习。有列边阿达者以本俗教法受知定宗，荐其贤，召侍左右。”[③]定宗在位是 1246～1248 年，这时的爱薛可能是刚来不久，估计年龄在 30 岁左右。据载，爱薛“至大改元六月癸卯薨于上都之私第，年八十二。”[④] 至大元年为 1308 年，以此推之，则他生于 1227 年，1246 年为 30 岁。

没有查到爱薛与蒙哥有何关系。1260 年忽必烈即位后，开始建立各种官署，其中包括回回司天监和回回医药院，由爱薛负责管理。在往后的时间里，他大都领导回回医药院工作。

爱薛所研习和管理的回回司天监，就其内容来说应属伊斯兰系统。虽然他的具体天文工作尚不清楚，但他是耶律楚材之后在中国传播伊斯兰系统天文学的第一人。

札马鲁丁是比爱薛晚约四五年从中亚某地来中国的伊斯兰系统的天文学家，他得到刚登汗位的蒙哥的信任。蒙哥笃信占星术，

---

① ［英］道森．《出使蒙古记》中之《鲁不鲁乞东游记》．217

② “拂林”．又作弗菻、拂菻等，各个时代有不同译法，其地域早期包括东罗马帝国，到宋元时代似指小亚细亚一带地方．

③ ［元］程钜夫．拂林忠献王神道碑．载《雪楼集》卷 5．

④ ［元］程钜夫．拂林忠献王神道碑．载《雪楼集》卷 5．

前已述及，在中国文献上也有记载，他很爱学习，“然酷信巫觋卜筮之术，凡行事必谨叩之，殆无虚日，终不自厌。”① 下面的资料非常重要：

“蒙哥合罕以其智慧的完美和远见卓识，卓异于［其他］蒙古君王，他曾解答欧几里得的若干图。他有卓绝的见解和崇高的意念，认为必须在他强盛时代建造一座天文台，他下令让札马剌丁·马合谋·坎希儿·伊宾·马合谋·集迪·不花里着手办这件事。”②

这段文字是在讲述蒙哥的远见卓识和一项未来的打算。其中有三个互相联系的问题需要进一步说明。

首先是札马剌丁·马合谋·坎希儿·伊宾·马合谋·集迪·不花里这个人是典型的阿拉伯叫法，其拉丁音应是 Jamal-al-Din · Muhammad · Kanxil Ibn · Muhammad · Jidi · Bukhara，无疑就是人们熟知的札马鲁丁。他来中国的时间应在 1250 和 1251 年③，来后便与蒙哥接触。

其次是蒙哥“曾解答欧几里得的若干图”的问题，被认为是欧几里得《几何原本》传入中国之始④，蒙哥是中国第一个学习《几何原本》的人⑤。这是没有疑问的，但是是何种本子，由谁讲解的，尚需讨论。而这恰恰是关乎中外数学交流史的研究内容。《几何原本》在中世纪研究的人很多，特别是在阿拉伯世界，从 9

---

① 《元史》卷 3 “宪宗本纪”.

② ［波斯］拉施特主编，余大钧译. 史集（第三卷）. 北京：商务印书馆，1986. 73～74

③ 李迪. 纳速拉丁与中国. 中国科技史料，1990，11（6）：6～11

④ 严敦杰. 欧几里得几何原本元代传入中国说. 东方杂志，1943，39（13）：35～36

⑤ 李迪. 谁是我国第一个研究《几何原本》的. 内蒙古教育（蒙文），1964，5 月号：54～55

世纪起不断有人进行翻译、改编和注解，光是作注释的阿拉伯学者就约有 50 人之多[①]。现在所知最早由希腊文直接译为阿拉伯文的是哈吉（al-Hajjaj Ibn Yusuf Ibn Matar，c. 786～833），写有 2 个本子，其中之一献给了国王阿尔·马蒙（al-Ma'mün，在位 813～833），现在已不完整了。最著名的改编本是纳速拉丁·途思（Nasir al-din al-Tūsi，1201～1280）的工作，他于 1248 年完成了对《几何原本》15 卷本全体的编述（Tahrir usul Uqlidis），他利用了 Hajjaj 的本子[②]。蒙哥学习的可能就是纳速拉丁改编本《几何原本》，由札马鲁丁带到中国，并给蒙哥进行了讲解，从而使蒙哥能解答"若干图"，是很合理而自然的。但是"若干图"是什么意思？也需要推敲。有可能是指一些几何图形，是札马鲁丁在讲解时随手画的还是有现成的图形？不得而知。可是当时一些改编本上有各种几何图形，例如 1051 年由玛吉思脱斯（Grigor Magistos，？～1058）译成的亚美尼亚文《欧几里得几何学》中有图形 17 页[③]。纳速拉丁的《欧几里得原本编述》中就有几何图形，蒙哥所解者有可能是其中某些现成图形。

最后是建立天文台的设想问题，这是蒙哥的一种很大的愿望，把此事交给了札马鲁丁去办理。可是由于蒙哥忙于战争，并没有着手推动札马鲁丁真正进行建台工作。也许还有另外的可能，即蒙哥通过札马鲁丁（也许还有别人）了解到纳速拉丁的情况，一心想得到他。1252 年秋 7 月，蒙哥"命忽必烈征大理，诸王秃儿花、撒立征身毒，怯的不花征没里奚，旭烈征西域素丹诸国。"[④]其中"西域素丹诸国即中亚甚至到西南亚、北非等地信奉伊斯兰教

---

① 伊东俊太郎编. 中世の数学. 共立出版株式会社，1987（36）：34

② 伊东俊太郎编. 中世の数学. 共立出版株式会社，1987（36）：34

③ 此书由前亚美尼亚科学院于 1962 年用亚美尼亚文重新印刷出版.

④《元史》卷 3"宪宗本纪".

各国。但西征西域的统率旭烈就在这年病死，西征的计划推迟到第二年执行。1253 年“夏 6 月，命诸王旭烈兀及乌良合台等率师征西哈里发、八哈塔等国。”[①] 这是蒙古第三次西征。旭烈兀（1219～1265）是蒙哥的弟弟，当他率军出发的时候，蒙哥对他说：“当邪教徒被征服时，把火者纳昔剌丁送到这里来吧。”[②] 这位火者纳昔剌丁就是纳速拉丁，火者是官名。蒙哥对纳速拉丁崇拜得五体投地，非常想得到这位大科学家。可是旭烈兀于 1255 年进入到伊朗东北部呼罗珊后确实得到了纳速拉丁，但并未把纳速拉丁送回东方，而是带着他西征，一直到报达（今伊拉克巴格达），要求纳速拉丁“在认为合适的地方建起一座观察星象的建筑物。他选择了蔑剌合城，建造了一座壮丽的天文台。”[③] 这就是著称于世的马拉加天文台，位于伊朗西部，于 1259 年建成，而旭烈兀则早于 1256 年在伊朗建伊尔汗王朝。因此，马拉加天文台从一开始就是在伊尔汗王朝开展工作的。

蒙哥虽有建立天文台的计划，且委托给札马鲁丁，但他却想得到更有声望的大科学家纳速拉丁，同时他又忙于指挥大军攻宋，建天文台之事也就暂时停止了。札马鲁丁无疑受到了冷落。

蒙哥的三弟忽必烈是一位有抱负的人，早在蒙哥登汗位前，他就“思大有为于天下，延藩府旧臣及四方文学之士，问以治道。”[④] 蒙哥即位之后即“尽属以漠南汉地军国庶事”[⑤]，他很快对回回历

---

① 《元史》卷 3 “宪宗本纪”.

② ［伊朗］拉施特主编，余大钧译. 史集（第三卷）. 北京：商务印书馆，1986. 74

③ ［伊朗］拉施特主编，余大钧译. 史集（第三卷）. 北京：商务印书馆，1986. 73

④ 《元史》卷 4 “世祖本纪一”.

⑤ 《元史》卷 4 “世祖本纪一”.

法发生兴趣，大约就是在蒙哥南征时，他在潜邸[①]，“有旨徵回回为星学者，札马剌丁等以其艺进，未有官署。”[②] 这样，札马鲁丁就到了忽必烈处，实际上离开了蒙哥。

札马鲁丁深得忽必烈信任。在忽必烈登汗位的第二年（中统二年，1261）命札马鲁丁负责粮食筹集工作：

“世祖中统二年，…三月，又命扎马鲁丁籴粮，仍敕军民官毋沮。”[③]

这件工作札马鲁丁做了多长时间不清楚，估计不会太长，因为他不能说汉语或蒙语，做此工作有困难。在此后的五年间不见有关于札马鲁丁的记载，到至元四年（1267）突然有二条资料见于史籍：

“至元四年西域札马鲁丁撰进《万年历》，世祖稍颁行之。”[④]

“世祖至元四年，扎马鲁丁造西域仪象七件”[⑤]。

这两件事都不是一朝一夕所能完成，特别是7件西域仪象更要花费时日。都是属于中外历算交流的内容。从7件仪器的具体构造等方面来看，可能是受到纳速拉丁在马拉加天文台上的天文仪器的影响。例如有一种叫“苦来亦阿儿子”的仪器：“其制以木为圆球，七分为水，其色绿，三分为土地，其色白。画江河湖海，脉络贯穿于其中。画作一方井，以计幅圆之广袤、道里之远近。”这是一架地球仪。在马拉加天文台也有一架地球仪，“分全球之气候为七带”[⑥]。两者似乎不同，可是记载的人各有不同的侧重面：前

① “潜邸”，皇帝在登极以前的第宅.

② 《元史》卷90“百官六·回回司天监”.

③ 《元史》卷96“食货志四”.

④ 《元史》卷51“历志一”.

⑤ 《元史》卷48“天文志一”.

⑥ [法] C. d'Ohsson 著、冯承钧译. 多桑蒙古史（下）. 商务印书馆，1936.

者强调的是水陆的比例，而后者则突出了气候带。两者可以是统一的。

由上述情况是否可这样推测：札马鲁丁在至元四年之前的某段时间受忽必烈派遣去了马拉加天文台参观、见习，在那里掌握了马拉加天文台上的仪器。回到中国以后，他和其他学者制造了7件仪器，对中国天文仪器产生了影响[①]。

爱薛和札马鲁丁是两个很著名的来华外国学者．他们把伊斯兰系统的历算传到了中国，并且长期在中国定居。但是当时来华的外国学者还有很多，将在第四节讲到的可里马丁就是一位较著名的历算家。还有如建筑专家亦黑迭儿，工艺及建筑家阿尼哥，兵器制造家亦思马因和阿老瓦丁等等，因为他们与历算交流没有关系，所以不加介绍了。

第三节　回回历算书的传入

札马鲁丁所造之7件天文仪器安装在刚由开平府升格的上都（在今内蒙古正蓝旗），他当然也就要在那里管理新制的仪器和进行天文研究了，当时也没有官署。到至元八年（1271年）“以上都承应阙官、增置行司天监”[②]，这就是以研究伊斯兰系统天文历法为主要任务的回回司天监。札马鲁丁当然是台长（当时叫“提点”）。

上都司天监是由承应阙官员增置而来，很可能札马鲁丁就是承应阙官员，其仪器便放置在承应阙上，从而形成了回回司天台。在这座天文台上除仪器外，还有一批阿拉伯文科技图书。在至元

① 陆思贤，李迪．元上都天文台与阿拉伯天文学之传入中国．内蒙古师院学报（自然科学版），1981（1）：80～89

② 《元史》卷90“百官志六”．

十年(1273)决定把回回司天台和在大都的金代旧天文台合并，统归秘书监管理，而札马鲁丁则升任行秘书监事，十月该台向秘书监申报“合用图书：经计经书二百四十二部，本台见合用经书一百九十五部”①。这些书虽都早已失传，但有一份十分珍贵的目录被保存下来，给我们提供了不少有价值的线索。其中属于历算的有如下一些：

1. 兀忽列的四擘算法段数十五部。
2. 罕里速窟允解算法段目三部。
3. 撒唯那罕答昔牙诸般算法段目并仪式十七部。
4. 麦者思的造司天仪式十五部。
5. 海牙剔穷历法段数七部。
6. 呵些必牙诸般算法八部。
7. 积尺诸家历四十八部。
8. 速瓦里可瓦乞必星纂四部。
9. 撒那的阿速忒造浑仪香漏八部。
10. 撒非那诸般法度纂要十二部。
11. 提点官家内诸般合使用文书四十七部。
12. 黑牙里造香漏并诸般机巧二部。
13. 窟勒小浑天图。
14. 阿剌的杀密剌测太阳晷一个。
15. 牙秃鲁小浑仪一个。
16. 拍儿可儿潭定方圆尺一个。

国内外有不少学者对这些书目提出了各自的见解，40多年前马坚的一篇文章② 对我们的理解是有帮助的。以下将对上列书目有选择的做一些说明。

---

① [元] 王士点，商企翁．元秘书监志（卷7）.

② 马坚．元秘书监志“回回书籍”释义．光明日报，1955年7月7日.

人们讨论最多的是第一种，因为有“算法”二字，所以一致的看法是数学书。是什么数学书，观点并不相同。日本的田坂兴道认为“兀忽列的四擘”可能是al-Khowarizmi的译音①，而多数人则主张“兀忽列的”是Euclid的译音。后一种观点可以接受，可是对整个书名的解释上仍可商榷。因为把“兀忽列的”音译为Euclid虽很相近，但是“四擘”等字无法得到合理的说明，且Euclid是现代英文。当时传进来的书籍无疑是阿拉伯文，而用阿拉伯文读Euclid应是Euclids，就是前面第二节见过的Uqlidis，这个音与“兀忽列的四”完全一样②。这样，不好理解的“四”便有了一个合理的位置。接下来的“擘算法段数”虽然仍不太好解释，但是却可以给出一个较为合适的说法。把这5个汉字从意义上与纳速拉丁的“Tahrir usul”相对应也许可以，而“十五部”就是15卷。换句话说“兀忽列的四擘算法段数十五部”应是纳速拉丁的15卷《欧几里得原本编述》阿拉伯文本。

第二种的前4个字“罕里速窟”的音有点与阿尔·花剌子模(Khowarizmi)相近，如果是这样的话，那是不是花剌子模的《代数学》(al-Kitāb al-mukhtasar fi hisāb al-jabr wa'l-muqabara)传入了中国?

第三种“撒唯那罕答昔牙是Safina Handasiya的对音，译云几何学③，不知系何人所作。

第四种“麦者思的”是Magest的对音，阿拉伯人把埃及亚力

① 田坂兴道. 东渐せろイスラム文化の一側面に就いて（上).《史学杂志》第53编第4号（1942).

② 这个问题的提出是1994年8月在延吉开会期间、新疆大学阿米尔副教授在与我讨论Euclid时说阿拉伯文读音，在后面有“S”. 在回程的火车上又与阿拉伯文专家宋岘先生相遇，他也认为是这样.

③ 马坚. 元秘书监志“回回书籍”释义. 光明日报，1955年7月7日.

山大天文学家托勒密的《大集》叫 al-Magest[①]。纳速拉丁也研究过《大集》，此书与《几何原本》成为当时学生学习的教科书[②]，流传很广，在回回司天台有一部理所当然。

第五种"海牙剔"是 Hayat 的对音，很可能是讲天文和地理的著作[③]。

第六种"呵些必牙"是 Hisabiya 的对音，译云算学[④]。

第十一种"提点官家内诸般合使用文书"显然是天文台台长日常工作中最常使用的参考书，其中可能包括一些必不可少的星表以及其他手册等。

其余若干种大体都是与星占或计时器及其他天文仪器有关，在此就不予介绍了。

上述的这批"回回书籍"包括不少当代或历史上的著名著作，可是遗憾的是没有被译成中文，而且长期锁在上都回回司天台里，外人不能得见。由于在秘书监里有用汉字写的书目，估计秘书监里的工作人员，特别是领导者肯定知道有这样一批书。如张易、岳铉、焦友直、靳德进、董文用等不能对这批书一无所知，其中岳铉、靳德进都是汉族著名天文学家，岳铉还担任过回回司天台的领导工作[⑤]，必然要请人翻译、讲解某些著作的内容。

这批书是怎样来到中国的，不见有记载。估计不太可能是一次运来。可是大多数应是札马鲁丁有意从马拉加天文台带来的，如前面所推测的那样：札马鲁丁被派遣去该台学习，掌握了许多天文仪器原理，不能不设法弄一批书带回中国，做为研究回回天文

---

① 马坚. 元秘书监志"回回书籍"释义. 光明日报，1955 年 7 月 7 日.

② Dictionary of Scientific Biography Vol. Ⅶ, Charles Scribner's Sons · Publishers: 1976. 509

③ 马坚. 元秘书监志"回回书籍"释义. 光明日报，1955 年 7 月 7 日.

④ 马坚. 元秘书监志"回回书籍"释义. 光明日报，1955 年 7 月 7 日.

⑤ [元] 王士点，商企翁. 元秘书监志（卷 9).

历法之参考。另外渠道进书的可能性较小，但不是没有。

无论如何，这也是中外数学交流史上值得研究的事。

第四节 阿拉伯数码幻方的传入

中外数学交流的方式是多样的，例如用头脑记住某些数学内容和计算方法，到另外的地方进行计算或教给他人，或者画在纸上、印在什么器皿的图形上等，都能起到交流的作用。在元代初年，阿拉伯数码幻方可能就是通过上述某种方式传到了中国。

1957 年春天，中国考古工作者在西安市元代安西王府遗址发现了五块铁板，其上铸有相同的阿拉伯数码幻方（见图 3.1.2）。出土时有 4 块装在 4 个石函里，另一块是从另外的地方找到，据说原来也是从一石函里弄出来的。

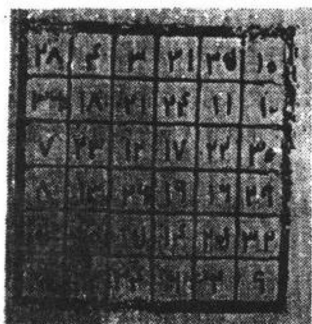


图 3.1.2 阿拉伯数码幻方拓片

28	4	3	31	35	10
36	18	21	24	11	1
7	23	12	17	22	30
8	13	26	19	16	29
5	20	15	14	25	32
27	33	34	6	2	9

图 3.1.3 阿拉伯数码幻方释文

此幻方为 6 阶，亦即由 1 到 36 的 6^2 个数字所构成[①]。（图3.1.3）这个幻方，它每横行、竖行和两对角线的各 6 个数之和均为

① 马得志．西安安西王府勘察记．考古，1960（5）：20～23

111。

这件事说起来很简单，但却是阿拉伯数学传入中国的物证。现在的问题是：五块铁板幻方是何时、何人放置在那里的？首先要弄清安西王府。

安西王府始建于至元十年（1273 年）。据载，“至元十年诏安西王益封秦王，别赐金印，其府在长安者为安西，在六盘者为开成，皆听为官邸。”[①] 这位秦王就是忽必烈的第三子忙哥剌[②]（？～1278）。建府的工程由当时的京兆尹赵炳（1221～1279）主持，他是至元九年被派到长安的，实际上是京兆路总管，兼府尹。“皇子安西王开府于秦[③]，诏治宫室，悉听（赵）炳裁制。”[④] 王府很快建成，马可波罗于 1275 年就记载了这座王府。马可波罗写道：在西安府“有一个属于忙哥剌王的漂亮王宫。……高墙环绕，上面筑有城垛，……构造整齐匀称、堂皇华丽的程度，简直无以复加。宫中有许多大理石砌成的殿堂和楼阁，装饰着图画、金箔并配上最美的天蓝色。”[⑤]

据研究知装有铁板幻方的石函是在王府夯土台基下出土的，由最高点向下约 25 m，而高出地面部分仅有 3 m 左右，因此无疑是开始建筑时特意埋在台基下深处的。石函和铁板幻方同样都是精心制作的。每一石函都是两块长宽各 36.5 cm 的正方形石板上下合成，上面的厚 18.5 cm，下面的厚 16.5 cm。下面的石板在正中央有一个正方形槽（如图 3.1.4），铁板幻方正好放在里面，它的下面有十字交叉的沟槽，不知作何使用。上面的石板是平的。五块铁板的大小均为长宽各 14.2 cm，厚 1.5 cm。出土时有 4 个石

① 《元史》卷 108 “诸王表”.

② 《元史》卷 107 “宗室世系表”.

③ “秦”指当时的关中.

④ 《元史》卷 163 “赵炳”.

⑤ 陈开俊等合译. 马可波罗游记. 福州：福建科学技术出版社，1982. 136

函位于同一水平面上[①]。

由上述情况可见，铁板幻方是以特定目的深埋在台基下的。幻方在世界上某些国家或民族常被看做是一种有神秘色彩的数字组合，伊斯兰世界相信幻方具有保护生命和医治疾病的巨大力量[②]。在安西王府台基下埋有铁板幻方的目的，一定与此相似。用阿拉伯数码铸造幻方，更说明是由在中国的某伊斯兰教学者所为。

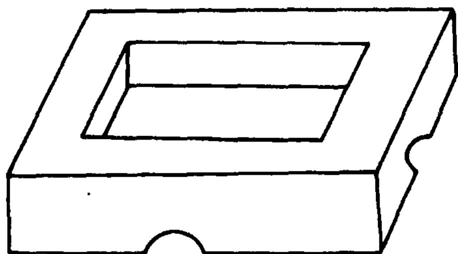


图 3.1.4

负责制造铁板幻方的伊斯兰教学者应是可马剌丁。在安西王府曾设有天文研究机构，工作人员达 112 人之多，留下姓名的是台判苏正、王世安、郭德[③]，没有可马剌丁。但是可马剌丁很可能是机构的负责人，而且他可能在建王府时敬奉忙哥剌。至元十五年时他已是司天少监。下面的一段资料可说明问题：

“至元十五年十月十一日司天少监可马剌丁照得：在先敬奉皇子安西王令旨交可马剌丁，每岁推算写造回回日历两本，送将来者，敬此。今已推算至元十六年历日毕工，依年例合用写造，上等回回纸扎合，行申覆秘监，应付。”[④]

特别重要的是可马剌丁“在先敬奉皇子安西王”，即是说以前

① 马得志．西安安西王府勘察记．考古，1960（5）：20～23

② 郑德坤．几件有伊斯兰幻方的华瓷（英文）．转引自夏鼐．元安西王府址和阿拉伯数码幻方．收入《考古学和科技史》．北京：科学出版社，1979．63～68

③［元］王士点，商企翁．元秘书监志（卷 7）．

④［元］王士点，商企翁．元秘书监志（卷 7）．

侍奉过忙哥剌，本人又是天文学家，铁板幻方是他所造合情合理。在至元十五年十月十六日已编好专供忙哥剌使用的至元十六年回回历两本，而忙哥剌于至元十五年十一月去世，以后也就不用再特意为他推算回回历了。

总之，安西王府遗址出土的铁板幻方应是由可马剌丁铸造，至元十年赵炳负责建王府时，以“保护生命和医治疾病”的目的埋在地下的。

可马剌丁是元代前期重要的回回天文学家，至元二十七年（1290 年）十月他以朝请大夫任秘书监兼司天监、撒答剌欺[①]等局人匠提举，元贞二年（1296 年）加大中大夫[②]。

元代传入中国的阿拉伯数码幻方不仅在西安一处发现，随着回回人在中国分布渐多，他处也会有类似情况。实际上，已有其他例子。1980 年上海博物馆考古部在清理浦东陆家咀明墓时就发现一个元代阿拉伯数码四阶幻方[③]，它由 1 到 16 的 4^2 个阿拉伯数码所构成（图 3.1.5）。

这个四阶幻方的性质非常好，它不仅具有上述六阶幻方那样的等和性质，而且与两个对角线平行的两侧所构成的 4 数之和也相等，都等于 34。这是一种对称型幻方（如图 3.1.6）。

8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

图 3.1.5

随着考古工作的开展和研究的深入，还会有元代阿拉伯数码幻方和其他阿拉伯数学在中国发现。

---

① “撒答剌欺”，蒙语，丝绸.

② ［元］王士点，商企翁. 元秘书监志（卷 9）.

③ 《文汇报》，1980 年 12 月 16 日.

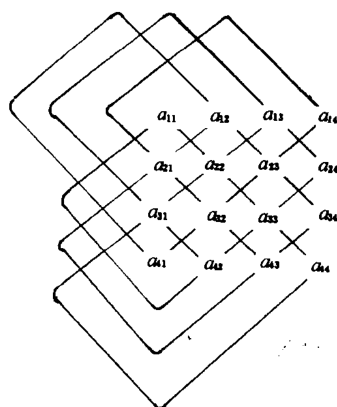


图 3.1.6

第五节　马拉加天文台的中国学者

上面四节所讲述的内容主要是外国数学通过中外学者（其中相当多来华外国学者定居于中国，成为中国回民或其他民族的组成部分）传入中国的情形。本节则讲中国数学的西传问题，主要讲马拉加天文台和中国的关系问题。

旭烈兀也是一位相信占卜的人，而占卜需要天文知识。纳速拉丁认为必须编订精确的天文表才行，因为岁差的关系以及日月五星等的位置都在发生变化，以前的星表往往有误差，要通过长期观测才能得到新的准确的数据，编成新的天文表。旭烈兀支持他建天文台，马拉加天文台就是这样建立起来的。

纳速拉丁在建台时请了 4 位著名天文学家协助他工作。这 4 人是：大司马城的木牙代丁（Moueyed-ud-din Ibn Ourzy）、可疾云城的奈只木丁（Nedjm-ud-din Kitab）、毛夕里城的法忽鲁丁（Fakhr-ud-din）和梯弗利斯城的法忽鲁丁（Fakhr-ud-din）。

天文台上安装了新制成的天文仪器和一个藏书很多的图书

室。纳速拉丁完成了特别著名的《伊尔汗表》(Zij-i ilkāni，The Ilkāni Tables)。此书有数表，为从前诸表如 Gouschar、Fakhir、A'layi、Schahi 诸人所编之表所无者。"[①]

在马拉加天文台工作的也有不少中国人。很显然，旭烈兀西征时肯定要带一些中国天文学家，以便随时进行占卜。这些中国天文学家便到了波斯，后来和纳速拉丁在一起研究天文和编制天文表。其中最著名的一位是 Fao-moun-dji 博士，当时人们习称他为先生 (Sing-sing)，是他使纳速拉丁知道中国纪年及其天文历数[②]。

这位先生是何人呢？人们有各种推测。如 Abd-Oullah Beidavaei 认为是《元典章》卷 23 所记之道教法箓先生[③]；李俨则音译为傅穆斋[④]；冯承钧说："后二字疑为蛮子之对音，其人或者姓包姓鲍。"[⑤] 最近还有人更明确地提出，该人为在秘书监工作的傅岩卿[⑥]。可能还有其他说法。这些推测可能都有问题，因为都没有给出有说服力的证据。此人尚须探讨。

在马拉加天文台工作的还有哪些中国学者，目前还不太清楚。

---

① C. d'Ohsson 著，冯承钧译．多桑蒙古史（下）．商务印书馆，1936．94（第四卷第五章）

② C. d'Ohsson 著，冯承钧译．多桑蒙古史（下）．商务印书馆，1936．94（第四卷第五章）

③ 转引自李俨．中国数学大纲（上册）（修订本）．北京：科学出版社，1958．290

④ 李俨．中国数学大纲（上册）（修订本）．北京：科学出版社，1958．290

⑤ C. d'Ohsson 著，冯承钧译．多桑蒙古史（下）．商务印书馆，1936．94（第四卷第五章）

⑥ 沈福伟．中西文化交流史．上海：上海人民出版社，1985．232

第二章 元初的历法改革

元初的历法改革是中国天文历法史上的一件大事，而且与数学关系密切。本章主要讲改革的经过和《授时历》的结构与内容。

第一节 改革的动因与工作人员

蒙古兴起之初没有成文历法。到成吉思汗乙亥年（1215 年），蒙古军攻下金中都（今北京市），金在中都的天文台也随之归蒙古所有，但在最初一段时间没有利用。到癸卯年（1223 年）刘敏为安抚使，兼燕京路征收岁课、漕运、盐场、僧道、司天等事。他利用自己的职权，“选民习星历者，为司天太史氏”[①]。太宗窝阔台七年（1235 年）十一月，中书省臣请契勘《大明历》，得到批准[②]。此《大明历》即本卷第一编所讨论之赵知微重修的《大明历》，蒙古开始在北方施行《大明历》。

此后，《大明历》施行差不多 40 年，出现了许多差误。司天台工作人员于至元十一年（1274 年）十一月向秘书省（监）报告请求解决。到第二年八月没有得到明确答复处理办法，于是历科管勾曹震圭等再次报告，提出：“本台见用《大明历法》至今，岁久渐疏，…多日不蒙明降，切恐失误国家大事”[③]。实际上早在至

① 《元史》卷 153 “刘敏传”.

② 《元史》卷 2 “太宗本纪”.

③ ［元］王士点，商企翁. 元秘书监志（卷 7）.

元十一年刘秉忠去世之前就已提出改历问题[1]。到至元十三年得到批准，这年六月十一日正式组建改历的领导与工作机构，成立太史局。

由此可知，改历的动因是由于《大明历》（即《知微历》）出现误差，无法继续使用。由于刘秉忠和司天台工作人员的一再申报，得到了忽必烈的支持。关于改历的一般工作人员，秘书监做了如下安排：

“至元十三年六月十一日奏奉圣旨：教改演大元国新历者，教司天台选差能书算、测验精通三十人，于改历处用者，钦此。行据司天台申，就于本台官员、管勾、阴阳人选取三十人，俱各书算、测验熟闲（娴），实是精通，申乞照验。

一、总计三十名

算造二十名

台官二员：少监冯天章、判官赵德新

提举一员：郝昇

教授一员：刘巨源

管勾二员：曹振（震）圭、霍从政

学正一员：张世英

长行人一十三名：张伯祥、郝余庆、陈显道、张仲英、刘克让、王素、张珪、高泰素、王彦实、朱谅、郝智、申居敬、赵居鼎

书写三名：李庆余、张诚、王亨

测验七名：（缺名）

管勾二名：张居寔、岳铉［兼书写并大都就用测验］

长行人五名：王椿、任世清、赵伯恒、赵祯、陈泰初[2]

---

① ［元］苏天爵. 知太史院事郭公行状. 元文类（卷50）.

② ［元］王士点，商企翁. 元秘书监志（卷7）.

以上给出具体人名的恰好是30人，另有“测验七名“空缺，加上这7人，共为37人。为什么测验未排人，可能是找不到合适人选，因为此项工作技术性很强，必须真正精通天文学的人才能胜任，看来当时比较缺乏，管勾岳铉还要兼任大都的测验工作。这些人中，岳铉后来达到很高的地位。

上述的人员仅是秘书监有权直接调用的一般工作人员，上面的领导层要由忽必烈亲自安排，秘书监无权过问。

至元十三年任命的改历高层领导有3人，即许衡、王恂和郭守敬，后2人原来是紫金山同学，许衡是当时著名儒学家。最初由王恂负责，其上还有“枢密副使张易，董其事。”他们认为“今之历家，徒知历术，罕明历理，宜得耆儒如许衡者商订。”上奏忽必烈，于是“诏衡赴京师。”[①] 就这样，从至元十三年起，“遂诏前中书左丞许衡、太子赞善王恂、都水少监郭守敬改制新历。衡等以为金虽改历，止以宋《纪元历》微加增益，实未尝测验于天，乃与南北日官陈鼎臣、邓元麟、毛鹏翼、刘巨渊、王素、岳铉、高敬等参考累代历法，复测候日月星辰消息运行之变，参别同异，酌取中数，以为历本。”[②]

在南北日官中有刘巨渊、王素、岳铉为前面30人名单中所有者，唯刘巨渊与刘巨源差一个字，应系同一人无疑。

到至元十年左右，元军南下攻宋，节节胜利，南宋灭亡已成定局，人心涣散。忽必烈利用这样机会，于至元十二年七月“诏遣使江南，搜访儒、医、道、僧、阴阳人等。”[③] 其中阴阳人包括天文学家，也就是把南宋的某些“日官”搜访到大都，不久便直接参加了改历工作。上面提到的名单中肯定有南宋过来的天文学

---

① 《元史》卷9“世祖本纪六”.

② 《元史》卷52“历志一”.

③ 《元史》卷8“世祖本纪五”.

家，但究竟是哪几个人，没有资料说明。

下面简单介绍一下许衡的情况。

许衡（1209～1281）字鲁斋，河内（今河南沁阳）人。青少年时喜读书，七八岁时即受学于乡师，凡三易师，所受书辄不忘。后因知世将乱，其父母欲知占候之术，乃让许衡学习推步占候。金亡后北上，隐于大名，当时著名医学家窦默（1196～1280）也隐于该处。他们“每相遇则危坐终日，出入经传，泛滥释老，下至医药卜筮、诸子百家、兵刑货殖、水利算数之类，靡不研究。”① 后来，许衡又研究易学，逐渐成为一名知识渊博的学者。忽必烈闻其名六七次征召他出来任职，每次都应召到朝，但均辞、不受。如至元七年（1270 年）拜中书左丞，力辞不允，八年四月改为集贤大学士兼国子祭酒，十年又辞去。直到至元十三年七月，又召他出来参与领导历法改革工作，不得已到了大都。这时他已是接近 70 高龄老人了。王恂、郭守敬都是 40 多岁的壮年。

大约是由于张易领导改历工作不力，后来未见提到。第二年便由张文谦来领导。至元十四年（1277 年），张文谦“拜昭文馆大学士，领太史院（局）事。初，世祖以《大明历》岁久浸差，诏鲁斋许公、太史令王恂、同知太史院事郭公，测验改正，命公董其事。”② 和张易一样，张文谦是改历工作的最高行政领导。他是紫金山从刘秉忠学习者，此次又和王恂、郭守敬遇到一起，实乃有趣之事。

根据上述情况，改历工作的领导班子和工作人员的分工大致如下：

行政领导—张易改为张文谦

理论研究—许衡

---

① ［元］苏天爵．左丞许文正公．元朝名臣事略（卷 8）．

② ［元］苏天爵．左丞张忠宣公．元朝名臣事略（卷 7）．

历法工作—王恂、郭守敬
算造—20 人
书写—3 人
测验—7 人（未列出具体人名）
管勾—2 人
长行人—5 人

这批组成人员是最基础的，随着工作的逐步展开要有所变动，特别是需要增加新的成员。

需要指出的是：这些人中，王恂、郭守敬、许衡等都精通数学，尤其是王恂领导改历工作的原因是由于他是以“算术妙天下”的数学名家的身份①，而不是天文学家。这在中国天文历法史和数学史上是罕见的。

正是这批专家、学者编订出非常优秀的历法——《授时历》。

第二节 改历前的研究工作

人员安排差不多之后，便展开了紧张的研究工作。这是能否编出好历法的基础和关键，所进行的重要研究项目归纳起来有 5 个。

第一个项目是理论研究。理论研究又包括几方面的内容，如对前代各家历法的比较；进行理论计算；编历的指导思想等。以研究前代历法为例，涉及到《元嘉历》、祖冲之的《大明历》、《大衍历》、《戊寅历》、《纪元历》、《宣明历》、《统天历》、《乾象历》、《崇元历》、《钦天历》、《应天历》、《仪天历》、《明天历》、《奉元历》、《观天历》、《占天历》、《会元历》、《淳熙历》、《乾道历》、《开禧历》、《淳祐历》、《会天历》、《成天历》、《皇极历》、《乙未

① ［元］苏天爵．太史王文肃公．元朝名臣事略（卷 9）．

历》等25种，南北两宋所有的历法都被研究，而赵知微重修的《大明历》更是此次改历的被改对象，必须认真研究。

在理论研究中，交食是一中心问题，历史上一直关心此点。一部历法是否被认为是好历法，在很大程度上要看它对交食的预报是否准确。此次元初改历也不例外，许衡、王恂等对自《诗经》、《书经》等所记日食及三国时代的日食记录进行研究。又用新的计算方法和用《知微历》计算的结果进行对比，分析它们的“亲”（精密）、“疏”（粗疏）的情况。

天文表的编制都是按当时星体在天空的位置入表的，可是由于岁差的原因，位置会慢慢改变，因此需要经常用岁差予以校正。尤其是传统的二十八宿距度，天文历法家更加注意。于是推动人们去研究岁差值，许衡等经过计算认为宋代《统天历》“六十七年，为日却行一度之差。施之今日，质诸天道，实为密近。”[①] 换算成现今的度数相当于每年有岁差约54″，稍偏大。

在中国历史上从汉代开始，制订历法要计算上元积年，也就是从几千年甚至上万年前的某年开始做历法的起点，被选中的那一年叫做“上元”，从上元到改历这年的年数叫“上元积年”。上元的选择有很强的条件。许衡等认为上元积年没有实际用处，在新历中予以废除。

第二项研究是制造天文仪器，此项工作由郭守敬负责。当他接到参与领导改历任务的任命时马上提出：

“历之本在于测验，而测验之器莫先仪表。今司天浑仪，皇祐中汴京所造，不与此处天度相符，比量南北二极约差四度；表石年深亦复欹侧。”[②]

中国古代的浑仪是一种赤道装置，它的极轴必须指向天球的南北

① 《元史》卷52“历志一”.

② ［元］齐履谦．知太史院事郭公行状．元文类（卷50）.

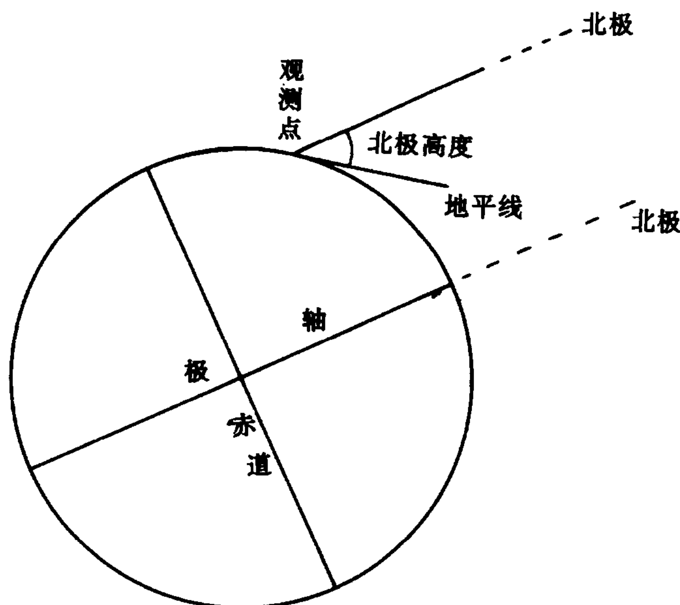


图 3.2.1

极（图 3.2.1），与地球自转轴平行，在不同纬度的极轴与地平线所成之角不相同。如果不然的话，所测出的天体的入极度不准确。郭守敬所说的皇祐浑仪是北宋在汴梁（开封）所造，其极轴是按照汴梁的指极方向安装的。金人把它运到燕京后并未调整，说“约差四度”基本符合实际。

上述的仪器都是 200 多年前的遗物，即使是调整好了也不如重新造的好。于是郭守敬一方面把旧有的仪器“考其失而移置之”，另一方面开始设计新仪器。

据统计，郭守敬所设计的天文仪器共有 17 件，它们是高表、仰仪、简仪、候极仪、玲珑仪、立运仪、证理仪、正方案、星晷定时仪、景符、日月食仪、浑象、窥几、丸表、悬正仪、座正仪、

天枢。

这是中国天文仪器制造史上的一次革命，不仅数量之多是空前的，而且颇多创新，可以说彻底打破了传统天文仪器的模式和设计思想。

郭守敬的设计出发点完全是根据观测和研究需要而进行的，同时想尽一切办法提高观测精度。对圭表的设计最为典型。中国历史上长期用圭表测量二至的午正日影长度，而且表高为 8 尺，也偶有主张改为 1 丈者。实际上“八尺之表”到郭守敬时至少有 2 000 多年，可是尺的绝对长度一直在加大。汉代的一尺仅为 23 cm 左右，一般在 23.5 cm 上下，北宋的一尺在 30 cm 上下①。另外早在汉代，人们就发现：表高与其午正水平投影的长度成比例改变。实际情况是只要在同一地点同一时刻，不同表高向任何平面上（即不限于水平面）的投影，表高与影长都成比例。因此“八尺之表”的传统毫无意义。郭守敬注意到表端的投影边界不清晰，直接影响到影长的精确度，也就是表端之影有虚影，它的模糊程度不论表的长短都一样。

郭守敬经过认真研究，采取了以下 3 个方法以提高表影长的精确度：其一是提高表的长度。假定表端投影的模糊宽度为$\triangle l$，8 尺长的表的真实影长为 l，而且其末端位于 Δl 的中间（如图 3.2.2）。于是测出来的影长的绝对误差为 $\frac{1}{2}|\Delta l|$，相对误差为

$$\Delta' l=\frac{\frac{1}{2}|\Delta l|}{l}=\frac{|\Delta l|}{2l}$$

由于表高及其影长成比例，且 Δl 不因表高而改变，所以当表高加大时，其影长的相对误差在减小。郭守敬把表高一下子提到 40 尺（8×5），提高了 4 倍。这样，其影长的相对误差就变为

① 国家计量总局主编. 中国古代度量衡图集. 北京：文物出版社，1981. 41～43

$$\Delta' l=\frac{|\Delta l|}{10l}$$

与 8 尺表相比，相对误差缩小了 4 倍，因而影长的精确度大大提高。

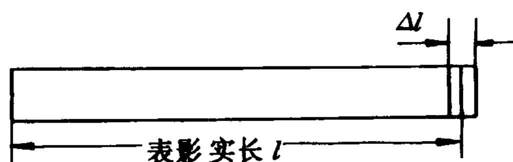


图 3.2.2

其二是，郭守敬把表端由一个板状形改换一个铜丝横梁。横梁的投影的清晰度有所提高，从而提高了影长的精确度。

其三是，郭守敬创造了景符。“表高景虚，罔象非真”，用景符解决这个问题。

这后两者要结合使用，尤其是景符就是为横梁而设计的，使横梁在圭面上的投影更有准确位置。

睑炙人口的简仪更是郭守敬的杰作。他以前的浑仪一般由三辰仪、六合仪和四游仪三套部件组合在一起，整个仪器环环相套的规环多达一二十个，有些根本没有用处。郭守敬则完全重新设计，他只在极轴上加四游双环，可随轴左右旋转。在四游双环上有一个位于环面上且能绕双环中心南北旋转的窥衡。窥衡两端翘起，中有圆孔（如图 3.2.3a），它的中间加 2 条横线（如图 3.2.3b）。加横线的作法相当于后来望远镜上加十字线。此外还有百刻环、定极环两个环，而

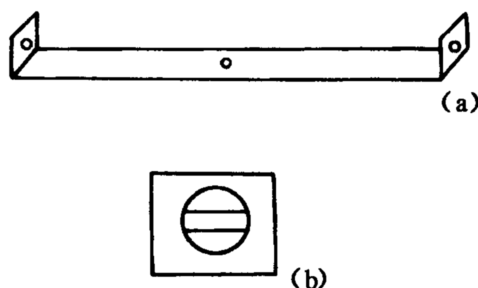


图 3.2.3

且都安装在四游双环之外。但是其功能与原来的浑仪完全一样，而使用起来更加方便。

其他如仰仪、正方案等都是独具匠心的杰作，因本书不是天文学史而不加介绍了。

第三个研究项目是“四海测验”。郭守敬认为唐代曾在全国13个地点进行过天文大地测量，包括“二至”日午正8尺表影长和北极出地高度①，而至元十三年改历时“疆宇比唐尤大，若不远方测验，日月交食分数、时刻不同，昼夜长短不同，星辰去天高下不同”②，制订的历法便不易保证精度。忽必烈很同意此项建设，于是“设监候官一十四员分道相继而出”，到27个地点进行测量。在27个地点中有7个是重点，主要是人员太少，而且“二至”是确定的日期，工作人员必须按时到达观测地点，至于北极出地高度则无时间限制，何时测量都行。这7个重点观测点如下：

南海，北极出地一十五度，夏至影在表南，长一尺一寸六分，昼五十四刻，夜四十六刻。

衡岳，北极出地二十五度，夏至日在表端，无影，昼五十六刻，夜四十四刻。

岳台，北极出地三十五度，夏至晷影长一尺四寸八分，昼六十刻，夜四十刻。

和林，北极出地四十五度，夏至晷影长三尺二寸四分，昼六十四刻，夜三十六刻。

铁勒，北极出地五十五度，夏至晷影长五尺一分，昼七十刻，夜三十刻。

北海，北极出地六十五度，夏至晷影长六尺七寸八分，昼八

---

① 李迪．中国数学通史．上古到五代卷．南京：江苏教育出版社，1997．318～319

② ［元］齐履谦．知太史院事郭公行状．元文类（卷50）．

十二刻，夜一十八刻。

大都，北极出地四十度太强，夏至晷影长一丈二尺三寸六分，昼六十二刻，夜三十八刻。[①]

上述 7 个地点中，和林（今蒙古人民共和国乌兰巴托）、铁勒和北海都不在今中国境内，而南海可能是越南胡志明市一带。它们的特点是大致呈南北分布，这是当时郭守敬提出的“即日测验，人少，可先南北立表，取直测景。”此 7 处仅在夏至午正进行了影长测量，没有冬至的记录。很显然，由夏至到冬至相隔半年时间，观测人员不能就地等待，有些地方距大都遥远也不可能再次派人去观测。

从夏至晷影长记录来看，此次观测使用的是二种高度的表。大都用的是四丈的高表，其余 6 处用的八尺表。这是可以理解的，因为离开大都到远处去，四丈的高表无法携带。

此次观测包括夏至日昼夜长短，记录了纬度越高、夜长越短的现象，铁勒已短到 18 刻。依此推之，到北极及其邻近小范围内应当没有夜晚、全是白天。但是郭守敬和其他工作人员并没有对这一现象进行分析研究。

第四项研究是通过观测和推算某年冬至和夏至的日期、时刻。当时连续工作从至元十四年到十六年，跨 3 个年头，目的是要推得至元十八年（1281 年）冬至日的时刻。推算方法是这样的：

在至日的前后任取 3 日，条件是有 2 日与至日前后等距，另一日与前 2 日之一相邻。还有用类似方法取 5 日、6 日，都可以。在这些日子的午正测量日影，根据影差进行计算，推出冬至或夏至时刻。

此项研究是在大都，利用新制的 4 丈高表进行的，因此，冬至前后的影长都在 7 丈以上，最小单位取到毫（这大概是估数，不

---

① 《元史》卷 48 “天文志一”.

可能精确如此程度）。为了保证所得二至时刻的准确，对每“至”都要重复（选取不同的日子）测算多次，同一“至”的测算结果都相同，这才定下来该“至”的时刻。最小单位都到刻，当时一昼夜为100刻，一昼夜又分为12个时辰，又与十二支相配，每时又分初、正，合为24时。因此当时说时间是某日某初（或正）某刻，并且不受季节影响，就象现在的钟表计时那样。此次测算要得到3个数据：日、时、刻。

下面举2个例子①。

例1. “推至元十四年丁丑岁冬至”。初推此年冬至在十一月十八日，共选5组测景日期，每组3个日子。第一组所测结果是：

十四日己亥，影长7丈9尺4寸8分5厘5毫；

二十一日丙午，影长7丈9尺5寸4分1厘；

二十二日丁未，影长7丈9尺4寸5分5厘。

其中十四日己亥与二十二日丁未到十八日都是相距4日。再经计算最后确定日子、时辰和时刻。

先推日：

$$\frac{\text{己亥影长}-\text{丁未影长}}{\text{丙午影长}-\text{丁未影长}}=\frac{3\text{ 分 }5\text{ 毫}}{8\text{ 分 }6\text{ 厘}}$$

$$=0.354\,6\cdots$$

“进二位”，即用100乘，变成35刻。由己亥到丁未相距8日，为800刻。再

$$\frac{(800-35)}{2}+50=432.5\text{ 刻}$$

其中400刻为4日，余下32.5刻。这样4日就推得了。

再推时：把上面的余数用12乘，即32.5×12=390，用100约得3，余90。所得之3为时，“满五十又作一时”，即要从

① 均载《元史》卷52“历志一”。

“90”中去掉“50”进为1时，于是共得4时，余40。

再推刻：把上面的余数，以12收之（除），得3.33，则数3为刻，余数弃之。

“命初起距日己亥算外”，即从己亥日第二日起第四日为癸卯日（十一月十八日）。所得时数为4时，每时又分为二，从子初开始起算，4时则为辰初。于是有“得癸卯日辰初三刻为丁丑岁冬至。”

例2. “推至元十五年戊寅岁夏至”。初推此年夏至在五月二十三日乙巳，共选4组测量日期，但有的组实为2组甚至3组，如第4组即属此种情形，这样做的目的是有的数据可以重复使用。进行计算时都是3个测得数据为1组，与例1的程序全同。下面简述一下第4组。

至元十四年十二月初七日辛酉，影长7丈5尺4寸1分7厘；
初八日壬戌，影长7丈4尺9寸5分9厘5毫；
初九日癸亥，影长7丈4尺4寸8分6厘；
十五年十一月初九日戊子，影长7丈4尺5寸2分0厘5毫；
初十日己丑，影长7丈5尺0寸0分3厘5毫；
十一日庚寅，影长7丈5尺4寸4分9厘5毫。

总共在6个日子进行了测量，它们的选取如下图所示（图3.2.4）：

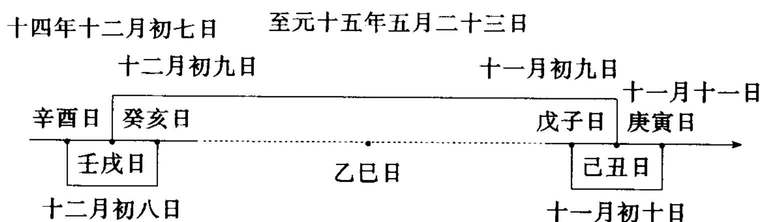


图3.2.4

在图中用线联起的壬戌日和己丑日是指它的影长相减之差，做为推日计算的分子，而辛酉日与壬戌日的影长之差为推日计算的分母。同样也可以用戊子日与己丑日的影长之差，或以壬戌、癸亥日的影长之差为分母，进行计算，所得最后结果都是乙巳日亥正三刻为至元十五年夏至时刻。

此例所取日子与夏至日前后相距一百六十三四日。

事先预定的“日”不一定是冬至或夏至发生时刻所在日子，有时测算的结果是第二日凌晨，至元十八年冬至就出现了此种情况。从记录来看只到至元十六年十二月，十七、十八两年未实测，而是根据前3年所测结果推算出来的，所以记载说：“右以累年推测到冬夏二至时刻为准。拟定至元十八年辛巳岁前冬至，当在己未日夜半后六刻，即丑初一刻。”实际上是到了己未日的第二天。

根据3年连续测算，拟定了至元十八年冬至时刻，此项研究已达到目的。

第五个项目是对五星运行的观测、恒星位置（在天球上的座标）的测量等，不再赘述了。

各项研究工作，从至元十三年逐渐展开，到至元十六年已三四年，基本上完成。就在这一年把太史局升格为太史院，王恂为太史令，郭守敬为同知太史院事。又在大都东墙下建立规模宏大的天文研究机构及天文台，充实进一批年轻的天文生，其中著名的有齐履谦。

齐履谦（1263～1329）字伯恒，父亲齐义，善算术。11岁时，其父“教以推步星历，尽晓其法”。齐履谦于至元十六年进入太史院，补为星历生。和他同辈的人，都是天文台官员子弟，王恂问他们算数问题，都答不出，唯齐履谦能“随问随答”，使王恂感到惊奇。后来他一直在太史院工作。齐履谦博通经史，天文、地理、律历、阴阳、医药、卜筮、乐律等无不淹贯，写了不少著作，其

中有《二至晷景考》二卷和《经串演撰八法》一卷二书[①]。他虽然不是当时显赫的历算大家，但是也做出了自己的贡献。

第三节　新历法的结构与改革内容

至元十六年，一面建筑天文台，一面对新历法进行编订，经过一年多的努力，到至元十七年的冬至，新历告成，忽必烈赐名《授时历》，第二年在全国颁行。而改历的主要负责人许衡、王恂都在这年先后去世，王恂当时才只有48岁，实在可惜！从此以后，太史院的重担主要落在了郭守敬的肩上。郭守敬除了日常研究工作外，还要对大量的研究遗稿进行整理，他先后上奏两批，共14种、105卷，其中可能包括某些后来的新研究成果。

现传《授时历》分为两大部分，即历议和历经。历议是理论性的讨论，包括关于验气、岁余岁差、冬至时刻、周天列宿度、交食、定朔、不用积年日法等项的论述，提出了看法和理由。如"积年日法"问题，历议中说："今《授时历》以至元辛巳为元，所用之数，一本诸天，秒而分，分而刻，刻而日，皆以百为率，比之他历积年日法，推演符会，出于人为者，为得自然。"[②]

历经是各种计算问题，包括步气朔、步发敛、步日躔、步月离、步中星、步交会、步五星等七大项，每项又分为若干小项。事实上是历法的中心部分。

在这两部分中，一部分改革内容无明显反映，必须籍助其他文献才能全部找出来。《授时历》的研究者们对此总结为"考证七事"和"创法五事"。前者在历议中大都讲过了，而后者则有下列记载，即所谓"创法五事"是：

---

① 《元史》卷172"齐履谦"。

② 《元史》卷52"历志二"。

一曰太阳盈缩：用四正定气，立为升降限，立招差求得每日行分初末极差、积度，比古为密。

二曰月行迟疾：古历皆用二十八限，今以万分日之八百二十分为一限，凡析为三百三十六限，依垛积招差求得转分进退，其迟疾度数逐时不同，盖前所未有。

三曰黄赤道差：旧法以一百一度相减相乘，今依算术、勾股、弧矢、方圆、斜直所容，求到度率积差，差率与天道实为吻合。

四曰黄赤道内外度：据累年实测，内外极度二十三度九十分，以圆容方直，矢接勾股为法，求每日去极，与所测相符。

五曰白道交周：旧法黄道变推白道，以斜求斜，今用立浑比量，得月与赤道正交，距春秋二正，黄赤道正交一十四度六十六分，拟以为法，推逐月每交二十八宿度分，于理为尽。[1]

这五项创法的中心内容是在历法研究中要采用新的数学方法或首次明确定名。归纳起来主要有两种方法：其一是招差法，实即以前的插值法。以前一直没有相应名称，王恂等首次提出“招差”一词，把招差法用于“太阳盈缩”和“月行迟疾”的计算。

其二是几何法，后三项创法都是属于几何的。本卷第一编第二章讨论《知微历》时已论述了该历使用几何方法计算交食食限等，不过没有明白说出，也没有留下几何图形，本质上说是后来研究者体会出来的。王恂等则明确提出使用几何方法，主要有勾股、弧矢、立浑等，如求黄赤道差过去用“相减相乘”，《授时历》则用勾股弧矢。特别值得注意的是有关图形间接地保留了下来，这是目前所知中国传统历法研究中绝无仅有的资料。可以说相当珍贵。

从整体来看，《授时历》的结构和唐代的《大衍历》几乎完全相同，无何特殊之处。重要的是在“考证七事”和“创法五事”，

① ［元］齐履谦．知太史院事郭公行状．元文类（卷50）．

改革颇多。关键是在长期实测的基础上制定的。因此有些结果的精确度有所提高。如1回归年为365.242 5日，当时所测的黄赤大距相当于23°33′5″2，现代理论计算为23°31′58″5，相差甚微。

总之，《授时历》是中国历史上一部优秀历法。

第三章　王恂的数学成就

如果把《授时历》与其以前的各家历法进行比较，那就会发现，其所用数学工具为最多。如上章所述，“创法五事”都是数学问题。为什么出现这种情况？这与改历的最高学术领导人王恂分不开，他是以数学名家的身份担任太史令的。数学在改历中的作用和地位必然有所提高。在当时进行研究时，王恂与郭守敬有明确分工，各司其职：

“以太子赞善臣王恂业精算术，凡日月盈缩迟疾、五星进退见伏、昏晓中星，以应四时者，悉付其推衍，寻迁太史令。以都水监臣郭守敬颖悟天运，妙于制度，凡仪象表漏，考日时步星躔者，悉付规矩之，寻授同知太史院事。”[①]

就是王恂负责数学计算，郭守敬则负责仪器制造和观测。因此，《授时历》中的数学工作及其成就应归功于王恂，就像天文仪器设计制造应属郭守敬一样。

第一节　《授时历》中对招差术的应用

王恂在《授时历》计算中较前人更多地使用了插值法，他叫“招差”法。就实质来说，他大量用三次差和三次插值法，可是他都设法降阶：把三次降为二次。但是收在《元史》中的《授时历》很简略，详细计算过程只能在明代人邢云路所写的《古今律历考》和清初黄宗羲（1610～1695）的《授时历故》以及《明

---

① ［元］杨桓．太史院铭．元文类（卷17）．

史》中找到。明代所用历法是根据《授时历》改编的《大统历》，后者保留了大量《元史》删去的内容。《明史》的作者指出："《授时历》以测验算术为宗，惟求合天，不牵合律吕、卦爻。然其法之所以立，数之所从出，以及晷影、星度，皆有全书。郭守敬、齐履谦传中，有书名可考。《元史》漫无采摭，仅存李谦之《议录》、《历经》之初稿。其后改三应率及立成之数，与夫割圆弧矢之法，平立定三差之原，尽削不载。使作者转意湮没，识者憾焉。"[①] 但是在《大统历》中载有这些内容，亦即《明史》所载《大统历》的有关计算系出自《授时历》。邢云路是明代万历（1573～1619）前期的天文历法家，他的《古今律历考》是一部重要著作，其中载有《授时历》的资料。因此，研究《授时历》中的数学方法必须从这几部书出发。

《明史》卷三十三"太阳盈缩平立定三差之原"、"太阴迟疾平立定三差之原"分别与《古今律历考》卷六十八"纪日躔"、"纪月离"相同。在计算中都用招差术，本来可到三次差，可是王恂采取降价的办法，把三次降为二次。今以"纪日躔"的"太阳冬至前后盈初缩末平立差"为例说明王恂的具体处理方法。他把由冬至到春分和秋分到冬至的时刻88日92刻各均分为6段，每段积日（t）14日82刻。通过实测得到积差$f(nt)$，是第n段积日nt的函数，从而先求出"日平差"

$$\frac{f(nt)}{nt}=F(nt) \qquad (n=1,2,\cdots 6)$$

再以相邻两"日平差"相减得"各段一差"，相邻一差再减得"各段二差"，所得结果都相等。清代天文数学家梅文鼎（1633～1721）对此也进行过研究，他所说："《授时历》于日躔盈缩、月离迟疾……并以盈缩日数厘为大段，各段日，除其段之积数，得

① 《明史》卷32"大统历法一上"。

数乃相减为一差，一差又相减为二差，则其数齐同"① 也是这个意思。现举一数表（表 3.3.1），并以现代形式改写如下：

表 3.3.1

段数 n	积日 nt	积差 $f(nt)$	日平差 $\frac{f(nt)}{nt}=F(nt)$	各段一差 $F[(n+1)t]-F(nt)=\triangle F(nt)$	各段二差 $\triangle F[(n+1)t]-\triangle F(nt)=\triangle^2 F(nt)$
第一段	14.82	7 058.025 0	476.25		
				−28.45	
第二段	29.64	12 976.392 0	437.80		−1.38
				−39.83	
第三段	44.46	17 693.746 2	397.97		−1.38
				−41.21	
第四段	59.28	21 148.732 8	356.76		−1.38
				−42.59	
第五段	74.10	23 279.997 0	314.17		−1.38
				−43.97	
第六段	88.92	24 026.184 0	270.20		

这是通过"日平差"，即用积日 nt 除积差 $f(nt)$ 的方法达到降阶的目的（这一点没有明确文字记载），不降阶就是三次差，现补作一表（表 3.3.2）如下：

表 3.3.2

段数 n	积日 nt	积差 $f(nt)$	各段一差 $f[(n+1)t]-f(nt)=\triangle f(nt)$	各段二差 $\triangle f[(n+1)t]-\triangle f(nt)=\triangle^2 f(nt)$	各段三差 $\triangle^2 f[(n+1)t]-\triangle^2 f(nt)=\triangle^3 f(nt)$
1	14.82	7 058.025 0			
			5 918.367 0		
2	29.64	12 976.392 0		−1 201.012 4	

① ［清］梅文鼎．平立定三差详说·序．

（续表）

段数 n	积日 nt	积差 $f(nt)$	各段一差 $f[(n+1)t]-f(nt)=\triangle f(nt)$	各段二差 $\triangle f[(n+1)t]-\triangle f(nt)=\triangle^2 f(nt)$	各段三差 $\triangle^2 f[(n+1)t]-\triangle^2 f(nt)=\triangle^3 f(nt)$
			4 717.354 6		−61.355 6
3	44.46	17 693.746 2		−1 262.368 0	
			3 454.986 6		−61.354 4
4	59.28	21 148.732 8		−1 323.722 4	
			2 131.264 2		−61.354 8
5	74.10	23 279.997 0		−1 385.187 0	
			746.187 0		
6	88.92	24 026.148 0			

表中各段三差的末二位小数可以忽略不计，取公差为−61.35即足用。但《授时历》中没有这后一个表。

下面再举“纪月离”之“太阴迟疾平立差”为例说明。与上例类似，首先明确规定“七段所测积限”：转周日[①] 27 日 55 刻 46 分，均分为 7 段，转周又分为 4 象，每段又分 12 限，每一象 84 限。所以一转周为 336 限。以 4 象除转周日数，得每象为 6.886 5 日，就整为 7 日，即 7 段，每日积 12 限。仿上例列表（表 3.3.3）于下：

表 3.3.3

段数 n	积限 ns	限积差 $f(ns)$	限平差 $\frac{f(ns)}{ns}=F(ns)$	各段一差 $F[(n+1)s]-F(ns)=\triangle F(ns)$	各段二差 $\triangle F[(n+1)s]-\triangle F(ns)=\triangle^2 F(ns)$
1	12	1.287 120	0.107 260		
				−0.004 776	

① “转周日”即月亮绕地球转一周的日数.

（续表）

段数 n	积限 ns	限积差 $f(ns)$	限平差 $\frac{f(ns)}{ns}=F(ns)$	各段一差 $F[(n+1)s]-F(ns)=\triangle F(ns)$	各段二差 $\triangle F[(n+1)s]-\triangle F(ns)=\triangle^2 F(ns)$
2	24	2.459 616	0.102 484		0.000 936
				−0.005 712	
3	36	3.483 792	0.096 772		0.000 936
				−0.006 648	
4	48	4.325 952	0.090 124		0.000 936
				−0.007 584	
5	60	4.952 400	0.082 540		0.000 936
				−0.008 520	
6	72	5.329 440	0.074 020		0.000 936
				−0.009 456	
7	84	5.423 376	0.064 564		

这份表同样是通过限平差而把三次差分降为二次差分。

这些降阶的差分表是“求盈缩差”和“太阴迟疾差”的立法之源，为此要定义10个概念，它们都是通过计算给出的，最后得到所需要的公式。

泛平积＝第一段平差＝$F(t)$

泛平积差＝$\triangle F(t)+\triangle^2 F(t)$[①]

泛立积差＝$\dfrac{\triangle^2 F(t)}{2}$

定平积（差）＝$F(t)+(\triangle F(t)+\triangle^2 F(t))$[②]$=a$

定平差＝$[\triangle F(t)+\triangle^2 F(t)]+\dfrac{\triangle^2 F(t)}{2}$[③]

$$=\triangle F(t)+\frac{3}{2}\triangle^2 F(t)$$

①②③　项前之“＋”号，有时为减：原文均有“前多后少，加；后多前少，减”之注.

日立差（限立差）$=\frac{\triangle^2 F(t)}{2}/t^2=c$

日定平差(限定平差)

$$=\left[\triangle F(t)+\frac{3}{2}\triangle^2 F(t)\right]/t=b$$

加分立差（损益立差）$=6c$

平立合差$=2b+6c$

加分定差$=a-b-c$

有了这些概念，特别是有了平、定、立三差a、b、c便可求盈缩差或迟疾差，用的是同样的公式。如求盈缩差，计算分两种情形，上面已举之例是一种，即由冬至前后到春分或秋分的日数叫做“盈初缩末限”；第二种是由夏至前后到秋分或春分的日数叫做“缩初盈末限”。《授时历》的计算步骤是：

“视入历盈者，在盈初缩末限已下，为初限，已上，反减半岁周，余为末限；缩者，在缩初盈末限已下，为初限，已上，反减半岁周，余为末限。其盈初缩末者，置立差三十一，以初末限乘之，加平差二万四千六百，又以初末限乘之，用减定差五百一十三万三千二百，余再以初末限乘之，满亿为度，不满退除为分秒；缩初盈末者，置立差二十七，以初末限乘之，加平差二万二千一百，又以初末限乘之，用减定差四百八十七万六百，余再以初末限乘之，满亿为度，不满退除为分秒，即所求盈缩差。”①

这段文字前一部分是讲对盈缩限的处理，后一部分为计算盈缩差的步骤，两种情形的公式一样，去掉所引数字，则有：

盈缩差=[定差－（立差×初末限+平差）×初末限]×初末限

=定差×初末限－平差×初末限^2－立差×初末限^3

① 《元史》卷54“历志三”.

设 $f(x+nt)$ 为某段内第 x 日内盈缩差，l 为初末限，则上面的计算为

$$f(x+nt)=al-bl^2-cl^3$$

可以称为“平立定三差公式”。

从这个公式也可以反过来体会王恂为什么取“定”、“平”、“立”三字命差的原因，a、b、c 分别与 l、l^2、l^3 相乘，最后一个为立方，第二个为平方。

有两个问题需要指出：其一是表 3.3.1 和表 3.3.3 中的 $f(nt)$ 和 $f(ns)$ 的值是实测出的，不是由某公式计算而来，因此所谓“函数”只是指在 nt 日所测得的“晷差”。

其二，邢云路在给出表 3.3.3 及 10 个概念的定义之后做结论说：“以上授时旧法”，接着是“又法”，下有注说“新立”，即以下包括三次差分表在内的部分不是《授时历》原有的，而是邢云路所增的新结果。详细情形将在本卷第六编第三章介绍。

《授时历》也用同样方法讨论“五星平立定三差之原”，先给出差分表，然后求出平、立、定三差，但均未给出“平立定三差公式”。实际上有了平、立、定，即可套用公式进行计算。造差分表的方法与前两例相同，具体作法是“凡五星各以实测，分其行度为八段，以求积差”，积差的求法是“各置其段所测积差度分为实，以段日为法除之，为泛平差。各以泛平差与次段泛平差相较，为泛立较。又以泛平较与次段泛平较相较，为泛立较。”[①] 其中“泛平较”为一次差，“泛立较”为二次差，到此差相等。同样是用段日去除通过实测得到的积差，得到“泛平差”，把三次差分降阶为二次差分。

清代人对《授时历》使用招差术计算日月五星盈缩差给了很高的评价：“按《授时历》于七政盈缩，并以垛积招差立算，其法

① 《明史》卷 33“历志三”.

巧合天行，与西人用小轮推步之法，殊途同归。”[①] 就推五星盈缩差来说，王恂是首创。

王恂在使用招差术时全是采用降阶方法，把三次差分降为二次也是一大改进，因为减少一次差使计算速度有所加快。按他的最终目的来看，是求盈缩差，不降阶必须用三次等间距（他全是用等间距）插值法进行计算，但是他未使用，而是用“平立定三差公式”代替了。

王恂（也包括郭守敬等）是否不懂得三次差分或三次插值法呢？绝对不是。因为他们改历的主要对象是《知微历》，其中已包括了这些内容，况且它本身并不难懂，而王恂又是当时最著名的数学家，如果连三次插值法都不清楚，实在是不可想象。从其具体做法来看，降阶的处理完全是有意的，不是随便偶然降一次，而是一贯的，正说明他们对插值法的熟练和精通。当然，毕竟在《授时历》及其相关文献中没有见到三次插值法的应用。这就给后人留下了研究的余地。

第二节 《授时历》中对几何的应用

在《授时历》的“创法五事”中有“三事”是几何“创法”，其主要内容是以勾股弧矢和割浑圆为工具进行有关计算。在中国历法史上首次处理了球面上的弧与弧间的问题，但王恂巧妙地将球面问题转换成平面问题，利用已有的几何知识予以解决。本节将主要讨论割浑圆问题，看他是怎样把球面问题转变成平面问题的。

在《授时历》中有两处是通过弧求弧问题，即“求黄道各度下赤道积度术”和“推黄道各度距赤道内外度术”。为了说明问题，

① 《明史》卷33“历志三”.

补绘一个天球图（浑圆形）（图 3.3.1）。

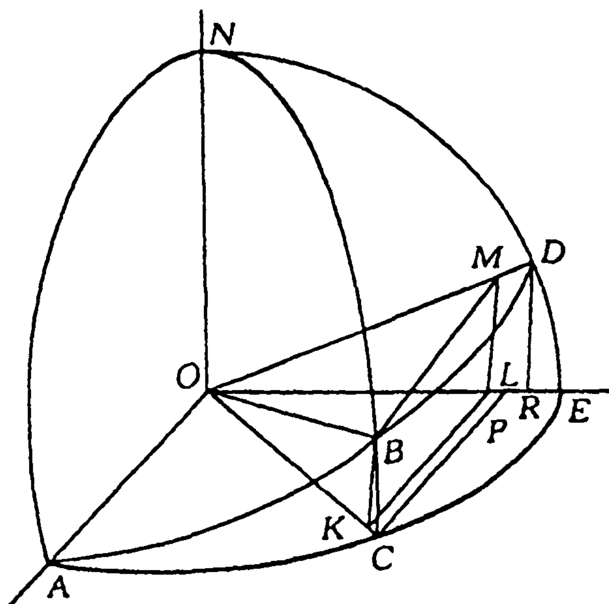


图 3.3.1

图 3.3.1 中，N 表示天球的北极，A 为春分点（或秋分点），O 为天球的中心，$\overset{\frown}{ACE}$表示天球赤道，$\overset{\frown}{ABD}$表示天球黄道，$\overset{\frown}{AE}$为赤道象限弧，$\overset{\frown}{AD}$为在赤道坐标系中赤道象限内的黄道弧。$\overset{\frown}{DE}$为黄赤大距（黄赤交角）。B 点为太阳所在的位置，如果 B 在赤道北，$\overset{\frown}{BC}$为“赤道内度”；B 在赤道南，$\overset{\frown}{BC}$为“赤道外度”（图中画的为“赤道内度”）。于是上述两个问题相当于：

“求黄道各度下赤道积度术”，即已知$\overset{\frown}{BD}$，求$\overset{\frown}{CE}$。

“推黄道各度距赤道内外度术”，即已知$\overset{\frown}{BD}$，求$\overset{\frown}{BC}$。

前一题相当于求 B 点的赤经余弧，后一题相当于求 B 点的赤纬。都可以用球面三角求解，因为$\overset{\frown}{BD}$为已知，$\overset{\frown}{AD}$为近似的黄道象限弧，也是已知的，于是可得$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BD}$，而$\angle A$ 为黄赤交角（与$\overset{\frown}{DE}$弧度相等）。从而有

$$\sin \overset{\frown}{BC}=\sin\angle A \cdot \sin \overset{\frown}{AB}$$

求出$\overset{\frown}{AB}$即可得到$\overset{\frown}{BC}$。

同样，因$\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{AE}-\overset{\frown}{AC}$，只要求出$\overset{\frown}{AC}$，即可求得$\overset{\frown}{CE}$。用下面的公式

$$\tan \overset{\frown}{AC}=\cos\angle A \cdot \tan \overset{\frown}{AB}$$

这两个球面三角公式看起来特别简单，真正做起来也有相当大的难度。实际上要两次求反函数值，最好利用现成的三角函数表，而且是正弦表和正切表，特别是当时的表达方式全是文字叙述，……所有这一切，当时的中国都是难于解决的。在《授时历》及相关文献中没有找到任何球面三角的痕迹，也就是说从可能性上和事实上两方面来看，王恂没有接触到球面三角问题。

王恂是利用沈括的“会圆术”求得两个弧长的。“会圆术”是平面问题，求出来的结果是弧的长度。王恂利用这个公式必须把长度变成弧度，他为此规定圆半径 $r=60$ 度 87 分半，由此计算弓形的弦、矢都为弧度。这样规定的根据是周天（大圆）为 365 度 2 425 分[①]，取圆周率为 3，于是有

$$r=\frac{365\text{ 度 }2\ 425\text{ 分}}{6}=60\text{ 度 }87\text{ 分}$$[②]

---

① 度下为万分.

② 度下为百分. 因此，2 425 分在百分制为 24 分 25 秒.

王恂把球面问题转换成平面的方法是这样的：

"凡浑圆中剖，则成平圆。任割平圆之一分，成弧矢形，皆有弧背，有弧弦，有矢。剖弧形而半之，则有半弧背，有半弧弦，有矢。因弦矢生勾股形，以半弧弦为勾，矢减半径之余为股，半径为弦。勾股内成小勾股，则有小勾、小股、小弦，而大小可以互求，平侧可互用，浑圆之理，斯为密近。"①

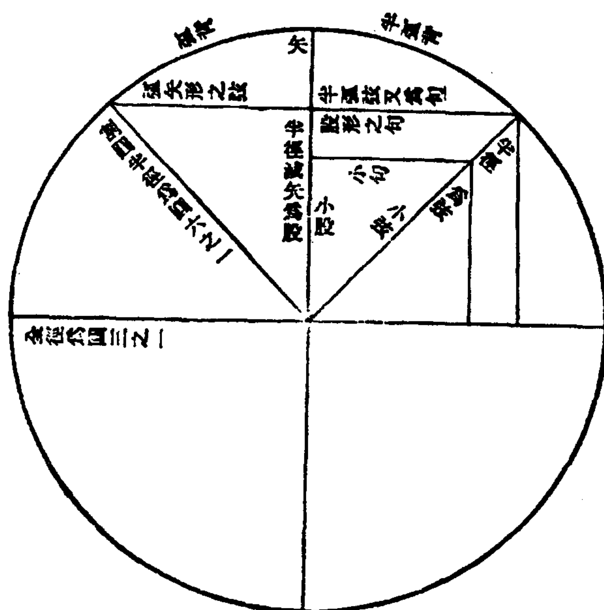


图 3.3.2　"割圆弧矢图"

图 3.3.2 即"浑圆中剖，所成平圆"之图。此图是书上的原

① 《明史》卷 32 "历志二"。

图，它是沿着所求某弧所在平面（都过球心）切开，从而得到弧矢形，即图的上部有“弧背”、“半弧背”部分，是为了说明原理而给出的。

在真正计算时，《授时历》对浑圆进行了两次中剖，每次解决一个问题。中剖的结果得到“侧立之图”和“平视之图”两图（图3.3.3a、b），前者是沿极轴和春分点、秋分点（在一个平面

图 3.3.3　a“侧立之图”

上）上下剖开，去掉向人的一面。后者是沿赤道面切开，把上半取掉，就是图 3.3.3b。但是，这两幅图不好理解，为计算上的需要，根据图 3.3.1 改绘成现代形式，而且有关部分都与图 3.3.1 相

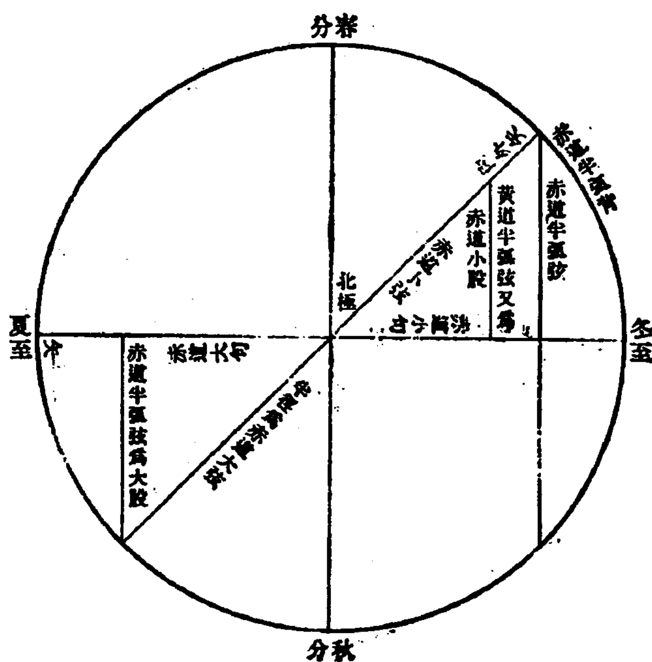


图 3.3.3　b“平视之图”

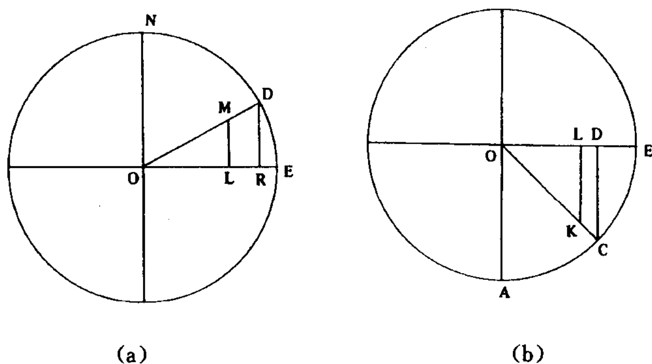


图 3.3.4　根据图 3.3.1 改绘的“测立之图”(a)和“平视之图”(b)

对应，这就是图 3. 3. 4a、b。

需要指出一点，求$\overset{\frown}{BC}$应沿$\overset{\frown}{NBC}$上下剖开，而《授时历》是沿$\overset{\frown}{NDE}$剖开的，其目的是在$\overset{\frown}{NDE}$上求得$\overset{\frown}{BC}$所对的半弦。在图 3. 3. 1 上过 B 点作垂直于 OC 的线 BK，过 K 点向 OE 作垂线 KL，过 L 在平面 ODN 上作垂线 LM，再过 D 点在同一平面上作 OE 的垂线 DR。B、M 联线，则 $BKLM$ 为一平行四边形，则 $BK=ML$①。

求$\overset{\frown}{BC}$，按会圆术公式可有

$$\overset{\frown}{BC}=BK+\frac{KC^2}{d}$$

应首先求出 BK 和 KC。因勾股形 OLM 和 ORD 相似，于是有

$$BK=ML=\frac{OM}{OD}\cdot DR=\frac{OM}{r}\cdot DR$$

$$OL=\frac{OM}{OD}\cdot OR=\frac{OM}{r}\cdot OR$$

$$OK=\sqrt{OL^2+LK^2}$$

$$KC=OC-OK=r-\sqrt{OL^2+LK^2}$$

把 BK 和 KC 代入会圆术公式，则有

$$\overset{\frown}{BC}=BK+\frac{KC^2}{d}=\frac{OM}{r}\cdot DR+\frac{(r-\sqrt{OL^2+LK^2})^2}{d}$$

同样地，由 C 点作垂直于 OE 的线 CP，此时 $CP/\!/KL$，因而勾股形 OPC 与 OLK 相似，于是有

$$CP=\frac{OC}{OK}\cdot LK=\frac{r\cdot LK}{\sqrt{OL^2+LK^2}}$$

$$OP=\frac{OC}{OK}\cdot OL=\frac{r\cdot OL}{\sqrt{OL^2+LK^2}}$$

---

① 以下的求法参考了钱宝琮的“授时历法略论”. 天文学报 1956，4（2）：193～211

$$PE=OE-OP=r-\frac{r\cdot OL}{\sqrt{OL^2+LK^2}}$$

由“会圆术公式”，有

$$\overset{\frown}{CE}=CP+\frac{PE^2}{d}=\frac{r\cdot LK}{\sqrt{OL^2+LK^2}}+\frac{\left(r-\frac{r\cdot OL}{\sqrt{OL^2+LK^2}}\right)^2}{d}$$

两式右端的OM、DR、d、OL、LK都是已知或可求出者，将具体数值代人式内，经计算即可得到$\overset{\frown}{BC}$和$\overset{\frown}{CE}$的度数。

根据上面的分析，可知王恂等所用的数学知识全是中国传统所有者，使用得相当巧妙，充分反映出有较高的数学水平。在当时的条件下只能把球面上的问题转换成平面问题加以处理。这也是中国数学史上首次明确研究球面问题，是一个进步。

在《授时历》的“创法五事”中，第五事“白道交周”计算“月与赤道正交，距春秋黄赤道正交一十四度六十六分”，也就是在计算“白赤道正交距黄赤道正交极数”时抛弃以往“以斜求斜”的传统方法，而创用“立浑比量”方法，也就是把在球面上的弧投影到一个平面上进行计算。清初黄宗羲有一补图[①]（如图 3. 3. 5）。

把图 3. 3. 5 改绘成图 3. 3. 6[②]，这样便于讨论。其中A点为夏至，B点为秋分，$\overset{\frown}{AB}$为黄道，$\overset{\frown}{AC}$为白道，$\overset{\frown}{BD}$为赤道，E为白道与赤道的交点，而$\overset{\frown}{BC}$为“白赤道正交距黄赤道正交极数”，即所要计算的事项。

把$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{BD}$向AOD平面上正投影，则它们的投影分别为OA、AC'、OD，而$\overset{\frown}{BE}$的投影为OE'。又把点D、E'、E与ON

① ［清］黄宗羲. 授时历故（卷 4）.

② 薄树人.《授时历》中的白道交周问题. 科学史集刊（5）. 北京：科学出版社，1963. 55～57

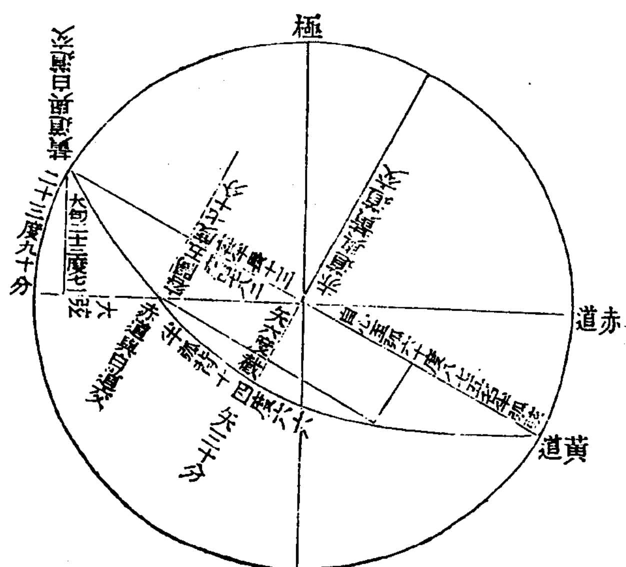


图 3.3.5

同向作平行投影，在平面 AOB 上得投影点 G、F'、F。这样做的目的是要把$\overset{\frown}{BE}$利用沈括“会圆术公式”表达出来。这个弧在 DOB 平面上，再由 E 向 OB 作垂线，垂足为 H，因而$\overset{\frown}{BE}$是以$2\,\overline{EH}$为底的弓形弧的一半，于是有

$$2\,\overset{\frown}{BE}=2\,\overline{EH}+\frac{2\,\overline{HB}^2}{2\,\overline{OB}}$$

或

$$\overset{\frown}{BE}=\overline{EH}+\frac{\overline{HB}^2}{2\,\overline{OB}} \qquad (※)$$

根据投影关系，其中 $EH=OE'$，$HB=OB-OH$，$OH=\sqrt{\overline{OF}^2-\overline{HF}^2}$，而 $OF=\sqrt{\overline{OE}^2-\overline{FE}^2}$。又由$\triangle ODG$ 和$\triangle OE'F'$为相似三角形有

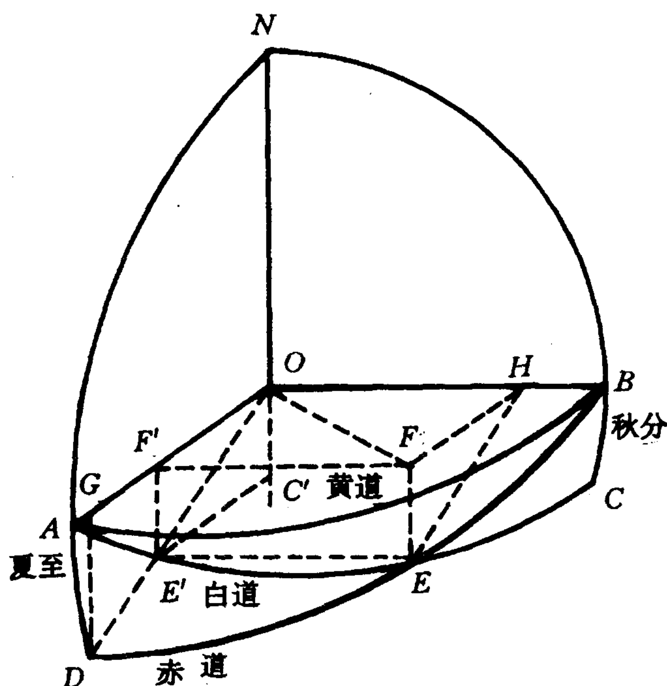


图 3.3.6

$$OE'=\frac{OD}{DG}\cdot E'F'$$

把这些结果代入（※）中，即可求出$\overset{\frown}{BE}$的值来。但是，$E'F'$仍是未知的，需要用天元术求出。下一节专门讨论天元术求解高次方程问题。

上述求“白赤道正交距黄赤道正交极数”的方法，在现传《授时历》中没有明确记载，而是按《明史》和《授时历故》所做的讨论。此种方法符合《授时历》一贯的思想。

第三节　解高次方程

王恂在《授时历》中大量使用天元术解高次方程，遗憾的是很少留下演草。明清时代的一些书上说是《授时历》的内容，如“问半弧背一度下，黄赤道矢度若干？”明邢云路[①]和清初黄宗羲[②]都说“即《授时历》元所谓立天元一也。”两者的文字叙述略有差异，内容全同。又如黄赤道半弧背二十四度求矢，上二人都讲得很详细，但未提到《授时历》；清梅珏成（1681～1763）在“授时历立天元——求矢术［以借根方法解之］”有“设黄道出入赤道二十四度求矢”题，且有“草曰：立天元一为矢，…”末有注称：“以上并依历草原文，而加注也。”[③]但与前二人所说的演算过程有很大差别，而结果都是“四度八十四分八十二秒”。这类题的一个共同特点是：已知半弧背或弧背的度数和周天径度数，求矢，可以统一用一个图形表示（图 3.3.7）。

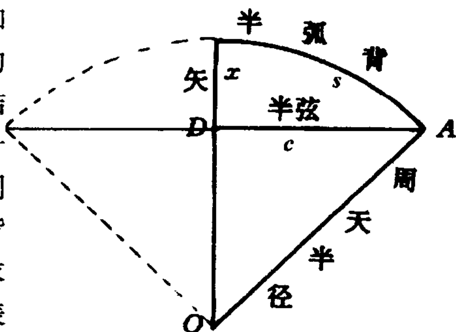


图 3.3.7

以“问半弧背一度下，黄赤道矢度若干？”为例，看《授时历》是如何求“矢度”的。已知半弧背为一度，周天径（直径）为一百二十一度七十五分少［少不用］。先给出如下的方程：

① ［明］邢云路．古今律历考（卷 69）．
② ［清］黄宗羲．授时历故（卷 3）．
③ ［清］梅珏成（辑）．梅氏丛书辑要（卷 61）．“附录一：赤水遗珍”．

“术曰：置半弧背一度，自之，得一度，为半弧背幂。置径一百二十一度七五，自之，得一万四千八百二十三度〇六二五，为径幂，又为上廉。二幂相乘，得一万四千八百二十三度〇六二五，为正实。置径幂一万四千八百二十三度〇六二五，以周径一百二十一度七五乘之，得一百八十〇万四千七百〇七度八五九三七五，为益从方。置半弧背一度，倍之，得二度，以周径乘之，得二百四十三度五十分，为下廉。”

设 s 为半弧背，d 为周天径，x 为矢度，则上引文字相当于

$$x^4+(2sd-d^2)x^2-d^3x+s^2d^2=0 \tag{A}$$

其中 s^2d^2 为正实，$-d^3$ 为益从方，$2sd$ 为下廉，d^2 为上廉。

方程（A）是怎样得到的呢？显然是来自沈括的“会圆术公式”。在前设的基础上，再设 c 为半弧背所对之半弦，则有

$$2s=2c+\frac{2x^2}{d}$$

或

$$s=c+\frac{x^2}{d} \tag{B}$$

在图 3.3.7 中，$\triangle ADO$ 为直角三角形，因此有

$$AD=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OD}^2}$$

亦即

$$c=\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}-x\right)^2}$$

将 c 代入（B），再加以整理就得到（A）。

把已知或计算出来的数值，代入（A）就是

$$x^4+(14\,823.062\,5+243.50)x^2-1\,804\,707.859\,375x+14\,823.062\,5=0 \tag{C}$$

经观察，置初商 80 秒，其解算过程是：

“初商八十秒为上法，乘上廉得一百一十八度五八四五，以减

益从方,余一百八十〇万四千五百八十九度二七四八七五为从方。置初商八十秒，自之，得六十四微，以减下廉，余二百四十三度四九九九三六，以八十秒乘之，得一度九四七九九九四八八为从廉，并从方，共得一百八十〇万四千五百九十一度二二二八七四四八八为下法，与上法相乘，除实，余三百八十六度三三二七一七〇〇四〇九六。”

也就是

上法＝80 秒或 0.008

上廉×上法＝14 823.062 5×0.008

＝118.584 5

从方＝益从方－上廉×上法＝1 804 707.859 375－118.584 5＝1 804 589.274 875

初商自之＝ $(0.008)^2$＝0.000 064

下廉－初商^2 ＝243.50－0.000 064

＝243.499 936

从廉＝（下廉－初商^2）×初商

＝243.499 936×0.008

＝1.947 999 488

下法＝从方＋从廉＝1 804 589.274 875＋1.947 999 488

＝1 804 591.222 874 488

下法×上法＝1 804 591.222 874 488×0.008

＝14 436.729 782 995 904

余实＝正实－下法×上法

＝14 823.062 5－14 436.729 782 995 904

＝386.332 717 004 096

上第一商就结束了，接着上第二商，解算步骤与第一商相似，因有两次商而略有不同。都是求从方、从廉和下法，对于第二商

（上法），从第一商解算的余实中减去下法乘上法，又得余实。

经观察，次商为2秒，其解算过程是：

“次商二秒为上法，置初商八十秒，倍之，得一分六十秒。加次商共一分六十二秒，乘上廉得二百四十度一三三六一二五，以减益从方，余一百八十〇万四千四百六十七度七二五七六二五，为从方。置初次商八十二秒，自之，得六十七微；加初商八十秒，自之，得一秒三十一微。以减下廉，余二百四十三度四九九八六九，以前所得一分六十二秒乘之，得三度九四四六九七八七七八，为从廉。并从方，共得一百八十〇万四千四百七十一度六七〇四六〇三七七八，为下法。与上法相乘，除实余二十五度四三八三，不足一秒不用。求得矢八十二秒。即《授时历》所谓立天元一也。”求到此不往下求了，得矢82秒。

仿初商的形式，予以分析。

上法＝2秒或0.000 2

2×初商＋次商＝2×0.008＋0.000 2

＝0.016 2

上廉×（2×初商＋次商）＝14 823.062 5×0.016 2＝240.133 612 5

从方＝益从方－［上廉×（2×初商＋次商）］

＝1 804 707.859 375－240.133 612 5

＝1 804 467.725 762 5

初次商^2＋初商^2＝（0.008 2）^{2}＋（0.008）^{2}

＝0.000 067 2＋0.000 064

＝0.000 131 2（2舍去）

下廉－（初次商^2＋初商^2）

＝243.50－0.000 131

＝243.499 869

从廉＝［下廉－（初次商^2－初商^2）］×

（2×初商＋次商）

＝243.499 869×0.016 2

＝3.944 697 877 8

下法＝从方＋从廉＝1 804 467.725 762 5＋

3.944 697 877 8＝1 804 471.670 460 377 8

下法×上法＝1 804 471.670 460 377 8×0.000 2

＝360.894 334 092 075 56

再余实＝余实－下法×上法

＝386.332 717 004 096－

360.894 334 092 075 56

＝25.438 382 912 020 44

此结果的最后10位小数因其不够1秒，舍去，即“不足一秒不用”，所以保留的结果为“二十五度四三八三”。

设初商为x_1，次商为x_2，正实s^2d^2为C_0，余实为C_1，再余实为C_2，于是上面的解算可表示为一般形式，分别如下：

上初商x_1，亦即上法。

从方：$d^3-d^2x_1$

从廉：$(2sd-x_1^2)x_1$

下法：$(d^3-d^2x_1)+[(2sd-x_1^2)x_1]$

$C_1=C_0-[(d^3-d^2x_1)+(2sd-x_1^2)x_1]x_1$

上次商x_2，亦即上法。

从方：$d^3-[d^2(2x_1+x_2)]$

上廉：$\{2sd-[(x_1+x_2)^2-x_1^2]\}\times(2x_1+x_2)$

下法：$\{d^3-[d^2(2x_1+x_2)]\}+$

$\{2sd-[(x_1+x_2)^2-x_1^2]\}\times(2x_1+x_2)$

$C_2=C_1-\{\{d^3-[d^2(2x_1+x_2)]\}+$

$\{2sd-[(x_1+x_2)^2-x_1^2]\}\times(2x_1+x_2)\}x_2$

《明史·历志》称：“下法乘初商（上法），以减正实，实不足

减，改初商，实有不尽，次第商除之”，就是说如果下法×上法大于正实，这时要改初商，使之变小，计算结果正实减下法×上法不为零，就要上次商，继续往下求。上举的例子就是上了次商，因“以减正实”的结果已很小，故不再往下求了。

王恂的解法是传统的减根方法，但不进行缩根变换。设初商为 x_1，则 $y=x-x_1$，或 $x=y+x_1$，代入（A），经整理有

$$-y^4-4x_1y^3-[6x_1^2+(d^2-2sd)]y^2+[4x_1-2x_1(d^2-2sd)+d^3]y+[d^3x_1-(d^2-2sd)x_1^2-x_1^4]=s^2d^2 \quad (C)$$

其中常数项 $d^3x_1-(d^2-2sd)x_1^2-x_1^4=(d^3-dx_1)x_1+(2sd-x_1^2)x_1^2=(d^3-d^2x_1)x_1+[(2sd-x_1^2)x_1]x_1$，而 $(d^3-d^2x_1)$ 和 $(2sd-x_1^2)x_1$ 就是“从方”和“从廉”。从方和从廉相加为下法，再乘上法 x_1，得

$$[(d^3-d^2x_1)+(2sd-x_1^2)x_1]x_1$$

移到右端与正实 C_0 相减，得余实 C_1。这时（C）式变为

$$-y^4-4x_1y^3-[6x_1^2+(d^2-2sd)]y^2+[4x_1-2x_1(d^2-2sd)+d^3]y=C_1$$

或

$$y^4+a_1y^3+a_2y^2-a_3y=-C_1 \quad (D)$$

如继续往下求，试次商为 x_2，即 $z=y-x_2$，或 $y=z+x_2$，代入（D）式。这时如 C_2 已很小就不上第三商了。在所举的例中 $C_2=25.438\ 3$ 与正实 $C_0=14\ 823.062\ 5$ 相比，已是微乎其微，而且已到 82 秒，再往下求实无实际意义。

82 秒就是矢的长度，代入（B）式即可算出半弧 s。在上面的解算过程中，未明确提到天元术，即未说“立天元一为矢”，实际上，在建立方程时是有的，这一点在梅珏成所引《授时历草》就是例证。如果把他加的注去掉了，则原文如下：

“草曰：立天元一为矢，自之，二因为二矢幂‖，以圆径一百二十一度七十五分除之为弦背差［今不除，有圆径母］。母减背四

十八度，为弦 ≡ Ⅲ ≡ |||| ，自之为弦幂式≡ ||||— |||||= |||≡T[①]。

○

||

○（元）

||≡|||⊥T

○

||||

有圆径母自之，又为径幂乘弦幂，寄左。又以矢减径，以矢乘之，四因为弦幂式|||| ≐ Ⅱ（元），以径幂|≡Ⅲ= |||（度）○T= ||||| 乘之，得

Ⅲ=|≐Ⅲ=|≡|||⊥||||| （元）亦为径幂乘弦幂。与寄左［相消］，得
|||||≐||≐||=||||≐

（度）

≡||||—|||||=|||≡T　　　。　三乘方开之，得四度八十四分

Ⅲ = | ≐ Ⅲ =| ≡|||⊥||||（元）

|||≡ ⅢT—T=|||||



八十二秒。”[②]

这是建立方程的过程，而且是以全弧 S 进行讨论的。设 24 度全弧所对之矢为 x，则上面最后一式相当于

$$4x^4+35\ 916.25x^2-7\ 218\ 831.437\ 5x+34\ 152\ 336=0$$

如何解这个 4 次方程，梅珏成没有往下说，但是恰恰是《明史》、《古今律历考》和《授时历故》未明说的立天元一部分。把两者合起来便构成一套完整的建立方程和解方程的方法。更有趣的是，当我们把梅珏成所记用式子表达出来，就是

① 原书所引筹码不规范，本书均按传统规定改写，应加负号的加了负号．为使读者明确起见，在 1 次项加“（元）”，有的加单位“（度）”.

② ［清］梅珏成．赤水遗珍．载《梅氏丛书辑要》卷六十一“附录一”.

$$S^2d^2-4d^3x+4d(d-S)x^2+4x^4=0^{①}.\quad (E)$$

此式与式（A）等价。令 $S=2s$（s 为半弧），代入（E），略加整理就得到（A）式。

王恂为什么用半弧解方程？很可能是因为（A）比（E）简单，（E）中有 3 项带有因数 4，而（A）却没有。

王恂对方程的研究，从总水平来看不如秦九韶，但有两点特别值得提出：其一是把天元术用在研究历法上，各项的排列是元在太下，与李冶《益古演段》所用一致，可能是受到它的影响。其二是保留下完整的建立方程和解方程资料。《授时历》中所用数据系来自天文实际，非人为假定，因此很复杂。王恂把线段的长度也以“度”为单位，如把“周天径”分为 121 度 75 分，矢、弦也用度等等。这样做是完全正确的，因为天球上设想的圆圈无法用绝长度单位表示其直径、矢、弦等的长度。又国外如古希腊、印度、阿拉伯等天文学家都是这样处理的。王恂的作法与外国是否有关，目前还不清楚。

通过以上的论述，知王恂在历法改革中用到了大量的数学知识，有些具有创造性，不愧为当时“以算术妙天下”的称号。

《授时历》中的数学方法，传到了朝鲜和日本，在那里得到发展。日本关孝和对招差术等的研究源于《授时历》，后来日本数学家完成不少这方面的专著，流传到现在。

---

① 王翼勋.《授时历草》“立天元一求矢术”复原. 兰州大学学报（自然科学版），1996，12（4）：9～14

第四章　官方数学教育与对官吏的数学要求

中国官方的数学教育起于隋，盛于唐，北宋到末期时兴时废地搞了几十年，北方的辽、金，西北的西夏和南方的南宋都没有兴办过数学教育，但南宋鲍澣之刊印过《算经十书》，对普及数学起过作用。由于数学有广泛的用途，上至天文历法研究、水利工程和其他技术，以及商业贸易，下到人民群众生活都离不开数学，因此研究者代不乏人，有关著作也不断问世。所有的人，包括最高统治者和最普通的百姓都不例外的有点数学知识。可是做为国家要求官吏必须通晓算术，在中国历史上尚未找到第二个朝代，只有元朝有这种要求。

第一节　元代的官方数学教育

从总体来说，元代统治者比较重视数学。但是一直顾不上考虑设立国家的数学教育，这也许是它的前朝金和南宋没有现成的样板，没有得力的人物提倡所造成的。

元代统治者，尤其是早期很关心数学。本编第一章已讲到蒙哥学习《几何原本》问题。忽必烈是否专门学习过数学，没有见到有关记载，可是他对数学家李冶的一片真情也颇使人感动。数学家王恂全依数学受到重用。

忽必烈对数学人才的招用不遗余力，早在至元十八年（1281年）于诏求的人才中明确包括数学人才："诏求前代圣贤之后，儒

医卜筮，通晓天文历数，并山林隐逸之士。”① 成宗铁木耳于大德九年（1305年）“诏求山林间有德行文学、识冶道者，遣使徵肖㪺②”，且指示说：“或不乐于仕，可试一来，与朕语而遣归”③，后来又“累徵肖㪺”④。这位肖㪺就是一名精通数学的博学者。

肖㪺（约1231～1308）字惟斗，其先北海（今山东潍坊一带），后来因他父亲到秦中（今陕西中部平原地区），遂为奉元（今陕西西安市一带）人。青年时曾为地方官吏，因与上司有矛盾，即引退，读书南山（可能指秦岭终南山）30年。他“制一革衣，由身以下，及卧，辄倚其榻，玩诵不稍置，于是博极群书，天文、地理、律历、算数，靡不研究。”⑤ 成为闻名全国的科学家，除了多次徵他去做官外，还有专门的科研项目，也要他出来参加。如至元二十三年（1286年）开始的全国地理志的编纂工作，就派人去到奉元请他，但未出来工作⑥。还有其他事例。

元代在至元二十八年（1291年）开始在全国各路设置阴阳学。规定“凡在腹里⑦、江南，若有通晓阴阳之人，各路官司详加取勘、依儒学、医学之例，每路设教授以训诲之。其有术数精通者，每岁录呈省府，赴都试验，果有异能，则于司天台内许令近侍。”延祐（1314～1320）初，又重申：“令阴阳人依儒、医例，于路府州设教授一员，凡阴阳人皆管辖之，而上属于太史焉。”⑧ 这里所说的阴阳人不是数学家，术数也不是数学，但是阴阳人都懂天文数

① 《元史》卷81“选举一”.

② “㪺”音举（jū）.

③ 《元史》卷81“选举一”.

④ 《元史》卷81“选举一”.

⑤ 《元史》卷189“肖㪺传”.

⑥ ［元］王士点，商企翁．元秘书监志（卷4）.

⑦ “腹里”，指离首都大都较近的区域.

⑧ 《元史》卷81“选举志一”.

学，而术数中同样有大量数学内容。在中国历史上，天文机构里一直有阴阳人，也就是星占之类的工作是天文机构的任务之一，可是像元代这样在地方上设阴阳学教授的作法极为少见。

元代虽无专门的数学教育之设置，但是在一般学校教育中包括数学内容。对于蒙古族官员子弟有学习数学的规定，至元八年（1271年）五月“令蒙古官子弟好学者，兼习算术。”[①] 显然不是对所有的子弟，而是“好学者”。这个规定公布之后到底有多少人“兼习算术”，不得而知。

至元二十四年（1287年）十一月初六日对官员等的子弟“学习书算”问题又重新提出，并做了具体安排：

“习学书算。至元二十四年十一月初六日尚书省奏：前者春里、柳林里，有时分立了国子监官人每的、怯薛歹[②] 每的兄弟孩儿每根底汉儿文字、算子[③] 教学呵，怎生么道奏来。如今官人每的孩儿每学有，怯薛歹每的孩儿每无。如今算子、文字学呵，后头勾当里使唤呵。勾当里教行呵学的，怯薛歹每的孩儿每根底交太史院里学算子，国子监里学文书呵，怎生奏呵是也，那般者么道圣旨了也，钦此。”[④]

这是当时蒙古族用生硬的汉语说的话，其中“每的”即“们的”，“每”即“们”。所谓“书算”是两个完全不同的学科，“书”在传统上是指书法，而且主要是写毛笔字，引文中所说的似乎还包括文书，内容广得多。“算”则是专指数学，没有其他涵意。

上面引文的意思是清楚的，主要是说国子监官员的子弟和近卫军的子弟都应当像汉族的孩子们那样学习文书和数学，可是现

---

① 《元史》卷7“世祖本纪四”.

② “怯薛歹”，蒙古语，近卫军之意.

③ “子”，原文误为“了”，今依意校改.

④ 《通制条格》卷5“学令”.

在官员们的子弟都学了，而近卫军的子弟却未学。数学和文书在将来的工作（“勾当”）中很有用处，不能不学。同时决定，这两个学科都要学习，把近卫军的子弟交给太史院去学习数学，交给国子监去学习文书。

由上述情况可以看出：第一，在汉族的教育中有数学内容，大概是普遍都学习数学；第二，当时蒙古族上层已明确认识到数学的重要性，要求这方面的教育；第三，太史院要承担数学教育的工作任务。

天文研究机构首先是负责本身所需人才的培养和教育，早在至元七年（1270 年）刘秉忠就奉圣旨“选取五科阴阳人”进行培养，规定：

“本台于各经书内出题，许人授试，知晓者收充长行、承应、管勾，及会得旧日程试司天大格式，每三年一次，差官于草泽[①]人内，精加考试，中选者收作司天生员，给食直入台攻习五科经书。据司天生本台存留习学子弟，亦年一试，中选者作长行，待缺收补。”[②]

其中所谓“五科”是当时天文机构的分科，它们是：占候天文科、测验天文科、占候三式科、司辰漏刻科和推步历算科，做这些工作都需要数学，特别是推步历算科所从事的主要是制订历法，所用数学知识最多。几乎所有的人都可以报考，考中的留在天文台里深造，攻读五科经书，以后在天文机构工作。

至元十年（1273 年）正月，元政府规定：“禁鹰坊扰民及阴阳图谶等书。”[③] 这就使民间私习天文历法的人受到限制，原来订的可从草泽中考选天文生成为不可能。于是至元十二年（1275 年）正

① “草泽”，在野而未做官的人.

② ［元］王士点，商企翁. 元秘书监志（卷 7）.

③ 《元史》卷 8 “世祖本纪五”.

月秘书监不得不重新修订，就是不考天文，把所谓天文“经书”改为学习。新规定的学习课程如下：

所习经书：宣明历、符天历、王朴地理新书、吕才婚书。以上经书须合通习。（按：即各科都要学习。）

占候天文科 [先视验目力与测验科目]，所习经书：晋天文、隋天文、宋天文[①]。以上科习一家。景祐周天星格图直图。

占候三式科，所习经书：太一王希明金镜二经、星祐福集、遁甲天一万一诀 [又名三元式经]、景祐符应经、神定经、六壬连珠经，补缺新书。

推步历算科，所习经书：大阴历[②] 经串 [旧例试宣明、符天等历日，今见行大明历法，合试大明历法。]

测验天文科，相验目力，所习经书：晋天文、隋天文、宋天文。以上科习一家。浑仪总要星格。

司辰漏刻科 [备将试中之人，试验声口、礼数升降名次。]，所习经书：宋天文内漏经 [旧例试宣明、符天漏经，目今见行宋天文漏经，合试此书。][③]。

此外，各科还有试题若干类型，如推步历算科，日食题一道：假令问大定庚子岁至乙巳岁[④]，其间有无日食，但取一食为定。又如司辰漏刻科，义题二道，其一是：假令问四时昼夜刻数不同，合（何）义之类。等等。解决这些问题，都需要很多数学知识，如本卷第一编第二章所述，当时金已由赵知微重修《大明历》。其中创用几何方法计算日食的食限等问题，元初也用此历，因此元初各

① 此处所列三种经书，很难判明具体所指为何书，“晋天文”如是《晋书·天文志》，后二书则应为《隋书》和《宋书》天文志.

② 此《大明历》指当时用的《知微历》.

③ [元] 王士点，商企翁. 元秘书监志（卷7).

④ “大定庚子岁至乙巳岁”即金世宗大定二十年到二十五年，公元1180～1185年.

科天文生，特别是推步历算科天文生必须得掌握《知微历》中的有关计算方法，有较高数学水平，否则考试不能过关。

元代的天文机构培养了一批天文数学家，如前述之齐履谦是以草泽之人进入太史院。当时是至元十六年，齐履谦只能通过普通经书考试中选，但是他的数学基础好，后来通过学习、提高，成为著名天文学家。

天文机构怎样教育那些如怯薛歹的子弟们，没有任何文字资料。也许是指定某位数学较好的天文工作者负责讲授算术吧。

元初没有实行科举制，直到皇庆二年（1313 年）正式决定实行科举取士，同年十一月颁布科举条例，下“行科举诏”[1]。规定第二年八月“天下郡县举其贤者、能者充赋有司，次年二月会试京师”。考试虽分蒙古色目人和汉人南人两组，但主要内容都是大学、论语、孟子、中庸和时务，后者多加周易、春秋三传、礼记等[2]，不包括数学。

通过以上所述，可知元代没有恢复中国历史上有过的专门数学教育，以后的明、清两代也未恢复，以前的金、南宋同样如此。因此，不能单独看待元朝，实际上已经是长期形成的状况。不过，元代还是了解数学的重要价值，重视数学教育的，所以令蒙古官员和怯薛歹的子弟要像汉族的青少年那样学习数学。通过下一节将进一步证明元代对数学的重视。

第二节　对官吏的数学要求

在封建社会里的文职官员，一般都有些数学知识。中国早期计算使用算筹，官员要把算筹装到一个小布袋里，叫算袋，带在

---

① [元] 程钜夫. 行科举诏. 载《元文类》卷 9.

② 《元典章》31“儒学”.

身上。唐代、辽代都规定文官要佩带算袋。元代是否有此规定，现在还不清楚。但是明确规定下级官吏必须通晓数学，则是其他朝代所没有的。

至元十九年（1282 年）规定，对于岁贡吏员的要求是：

“各路司吏有缺，于所属衙门人吏内选取。委本路长官参佐，同儒学教授考试，习行移、算术，字画严谨，语言辩利，诗、书、论、孟[①] 内通一经者为中式，然后补充。”[②]

这里所说的是：在地方上如果下层官吏出缺，可在本衙门内选取，通过本路长官和儒学教授主持考试，考中的可补缺录用。考试科目里明文规定有“算术”，即要求应试者能计算，而且是考试科目的第一项，可见对官吏的数学要求占有重要地位。

至于对朝廷各部门工作的下层官吏是否有同样要求，本条资料没有提到，可能没有。过了一段时间却有了这方面的明确要求，大德七年（1303 年）规定：当户部令史出缺时，要由懂数学的人补充，即“户部令史，于籍记部令史史内从上以通晓书算、练达钱谷者发遣，从本部试验收补。”[③] 户部的职责是：“掌天下户口、钱粮、田土之政令。几贡赋出纳之经，金币转通之法，府藏委积之实，物货贵贱之直，敛散准驳之宜，悉以任之。”[④] 主要是管理财务和物资，需要大量计算。大德五年（1301 年）户部有令史 61 人，还有回回令史 6 人，是下层官吏中人数最多的一类。令史可能是从七品或正七品[⑤]，不低。他们的工作任务应是日常收支帐目以及相关的统计、计算，无疑相当繁重，要求他们通晓算术完全正确。

① “诗、书、论、孟”是《诗经》、《书经》、《论语》和《孟子》四书的简称.

② 《元史》卷 83 “选举志三”. 《元典章》12 “儒学”.

③ 《元史》卷 83 “选举志三”.

④ 《元史》卷 85 “百官志一”.

⑤ 规定正、从八品官吏可考令史，有时似乎又没有品级.

当时，对官吏通晓算术的要求不限于户部令史，早在至元二十六年（1289年）九月对于书吏已有类似规定，而且特别强调“诸司文案为书吏者，其责甚重，贵在得人”，“今后发补察院，本各道书吏，当面试验：首论行止，次取吏能，又次计月日多[①]者，为优。”考试科目分为两大类：

行止：事父母孝、友于兄弟、勤谨、廉洁、谦让。

吏能：行遣熟闲、言语办（辨）理（利）、通习条法、晓解儒书、算数精明、字画端正。

还有一个条件，就是“自来不曾犯赃私罪，经断”[②]。

明确规定“首论行止”，也就是人的品德为最重要的条件，吏能是次要的。但考试科目里有算数，而且要求精明，是很好的做法。

大德八年（1304年）对于典吏规定：“行省典吏，依准部拟于各路两考之上、散府考满有解，由司吏书算熟闲（娴）、谙练官事，或四书内科一通大义者，选充。”[③] 这就是由司吏选拔，典吏再次要求算术。可以说是层层要求数学。

由上述情况可知，元代在许多部门都要求下层官吏必须掌握数学，否则不能录用。对于推动人们注意学习数学，会起一定的作用。

元代不仅要求官吏要通晓数学，而且对医生也有同样考虑。大德九年（1305年），礼部同意王祐下列的建议：

“今各路虽有医师，学亦系有名无实参详。莫若今后督责各处有司广设学校，为医师者，命一通晓经书良医主之。集后进医生，讲习素问、难经、仲景叔和脉诀之类，然亦须通四书，务要精通，

---

① “月日多”，工作时间长.

② 《元典章》12“吏部六·书吏”.

③ 《元典章》12“吏部六·典吏”.

不精通者禁治、不得行医。吏员命明师主之，各处首领官公务毕率习师吏，贴书人等讲习经史，先自小学、文公、四书及典章、案式、算术之类，须要精通。各处长官时常提调，严加训教，务要成材，以备试验擢用”①。

此虽个人建议，但对提高医生的整体水平大有好处。中书省承认，当时教官和提调官不能举行督责，以致怠惰，规定今后医生必须精通四书方能行医。尽管未明确提到算术，而医生掌握必要的算术知识比以前定有新的认识。

要求医生必须精通算术，是首次有人提倡。

政府要求下层官吏必须掌握数学是完全必要的，特别是像户部那样的部门和某些需要统计和计算的工作岗位，更是十分重要。事实上，当时已经出了因不懂书算而给工作造成损害的事例。大德三年（1299年）顺德路仓库因管理人员库子水平低而出现问题的报告：“本路只应仓官广盈，库子在前于司县系籍有抵业下民户内选取，为系庄农之家，钱谷、书算俱不过晓。其间收支粮斛、出入钱帛浩大，以致亏兑失陷，致将应有财产、房舍、孳畜等物，尽行折剉②，更当侵盗罪犯，至今消乏，深为未便”，要求更换库子③。这些来自农家的库子既不会写字，也不会计算，仓库里有多少物资都不知道，损失严重。出现这种情况，不一定完全由于库子不懂书算，但无疑是重要原因。

上述的选拔下层官吏的办法，很快就出现了反面情况，除了应试者有的请人代作，而本身多孤陋寡闻、不知廉耻者外，还有一种倾向：

“今窃见各路府州司县民家子弟，多不攻书，虽曾入学，方及

① 《元典章》32“礼部五·医学”.

② “剉”音挫cuò，折伤.

③ 《元典章》12“吏部六·库子”.

十五以下，为父兄者多令废弃儒业，学习吏文，以求速进。此所谓不揣其本，而齐其末矣。其于礼仪之教，懵然未知；贿赂之情，循习渐著，日就月将，薰染成性，不数年间，投托官府，侥幸妄进，补一正名，自为志满，不复经书为会。”①
这段文字中未涉及到对算术的学习，可是一定包括数学。学习的目的是为“以求速进”，而不是真正掌握数学基础知识，仅是能应付考试学习一些最简单的计算而已。尽管如此，元代要求下层官吏精通数学的做法，仍然值得肯定。

以下介绍一些与数学有关的人物。

陆文圭字子方，江阴（今江苏江阴一带）人，幼而颖悟，读书过目而成诵，终身不忘。南宋末曾中乡试。宋亡，隐居江阴城东，学者称他为墙东先生。他博通经史百家，及天文、地理、律历、医药、算数之学。元恢复科举之后，“有司强之就试，凡一再中乡举”，“朝廷数遣使驰币聘之，以老疾，不果行。”②

熊朋来字与可，豫章（今江西南昌）人，南宋末于咸淳甲戌（1274 年）登进士第，不久宋亡。隐居里间，生徒受学者常百数十人。元朝在豫章的官员，“皆朝廷名公卿，皆以宾礼延见”，如廉希宪之子廉淳身居参知政事的高位，以师礼事朋来，终身称门人。他有家集三十卷，讲述礼乐之事，关于世教，其余若天文、地理、方技、名物、度数，靡不精究③。他研究过数学。另外，他著有“胡氏律论序”一篇④，其中涉及不少数学内容。中国传统律学一向利用数学进行计算，他说“至于律同合声，阳左旋而阴右转，观其次序不以算法论矣。六觚一握自秦柱下史得此书⑤，以行于汉”，

① 《元典章》12“吏部六”.
② 《元史》卷 190“陆文圭传”.
③ 《元史》卷 190“熊朋来传”.
④ 《元文类》卷 33.
⑤ “此书”似指“周礼”.

以及其他有关论述。说明熊朋来很精通数学。他和当时其他著名知识分子一样，颇受朝廷重视。

靳德进，其先潞州人，后徙大名（今河北大名）。其父靳祥，师事陵川郝温，兼善星历。靳德进自幼刻苦学习，尤精于星历之学。由刘秉忠推荐进入天文研究机构，选授天文、星历、卜筮三科管勾，后来晋升到秘书监，掌管与天文有关之事务。元成宗初，授与他昭文馆大学士头衔，知太史院，领司天台事[①]。他是元代前半期著名天文历算学家。

苏天爵（1294～1352）字伯修，真定（今河北正定）人。元代中期著名学者，曾在朝廷内外做官。他为学“博而知要，长于纪载”，有多种著作，流传于今的有《国[②]朝名臣事略》十五卷和《文类》[③]七十卷（编纂的书）[④]。他还对历学很有研究，“著《大明历算法篇》，以稽其谬失焉。”[⑤]既能用算法纠正《大明历》（即《知微历》）的谬失，则必对数学有较高水平。

阔里吉思，蒙古族，文武双全。性勇毅，习武事，尤笃于儒术，筑万卷堂于私第，日与诸儒讨论经史、性理、阴阳、术数，靡不该贯[⑥]。

石抹继祖，字伯善，契丹族。他“明达政事，讲究盐策，多合时宜。为学本于经术，而兼通名法、纵横、天文、地理、术数、方技、释老之说，见称荐绅间。”[⑦]

在多数情况下，精通天文、术数必然要掌握较多数学知识，否

---

① 《元史》卷203“靳德进传”.

② “国”字，后人改为“元”字.

③ 《文类》即传本《元文类》.

④ 《元史》卷183“苏天爵传”.

⑤ ［元］王理．元文类序．载《元文类》卷前.

⑥ 《元史》卷118“阔里吉思传”.

⑦ 《元史》卷188“石抹宜孙传”.

则天文、术数是搞不好的。

除以上所讲者，还有一些人也善算或精于术数，如杨湜、杜本、田忠良、金履祥、白景亮、柳贯、许谦、丁好礼等等，不再细讲了。

上述诸人对数学的学习和研究虽然属个人行为和兴趣，但是绝大多数都受到朝廷的礼遇和重用，有些人本身就是在朝廷里从事历算研究。

第 四 编

朱世杰的数学成就

朱世杰生活于元代的前中期，纵跨13和14世纪之交。他不仅是元代，而且是中国历史上的杰出数学家之一，在世界数学史上也占一席之地。他有《算学启蒙》和《四元玉鉴》两部著作传世，本编主要讲述这两部著作及其中的数学成就。

第一章 朱世杰与《算学启蒙》

本章讲述朱世杰的简单生平和《算学启蒙》的内容与成就。

第一节 朱世杰及其著作

朱世杰和刘徽一样，尽管他在数学领域做出了重要贡献，然而却没有留下较详细的传记资料，以致连他的生卒年代都不清楚，幸好在他的著作前有当代人写的序和后序三篇给我们提供了某些珍贵史料。为了分析方便起见，把三篇不太长的序全文引录于下：

1. 赵元镇《算学启蒙序》

“尝观水一也，散则千流万派[①]；木一也，散则千条万枝；数

① “派”音孤gu，可理解为小河流.

一也，散则千变万化。老子曰：数者一也，道之所在，生于一，数之所成，成于九。昔者黄帝氏定三数为十等，九章之名立焉。周公制礼作为九数，九数之流九章是已。夫算乃六艺之一。周之宾贤能教国子，此九数也。历代沿袭，设科取士。魏唐间算学尤专，如刘徽之注九章，续撰重差；（李）淳风之解十经，发明补问，博综精微，一时独步。自时厥后，科目既废，算法罕传，信如是也，则计租庸调，何术可凭，步数畸残；若为锁豁米谷，正负何由剖析，是犹舍勾股而欲测海，去寸木而欲量天，多见其不知量也。燕山松庭朱君，笃学九章，旁通诸术，于寥寥绝响之余，出意编撰算书三卷，分二十门，立二百五十九问，细草备辞，置图析体训为算学启蒙，其余会计、租庸、田畴、经界、盈朒、隐互、正负、方程、开方之类，已足以贯通古今，发明后学。卷末一门，立天元一算，包罗策数，靡有孑遗。明天地之变通，演阴阳之消长，能穷未明之明，克尽不解之解，索数隐微，莫过乎此，是书一出，为算法之标准，四方之学者归焉，将见拔茅连茹，以备清朝之选云。大德己亥七月既望惟扬学算赵城元镇序。”

2. 莫若《四元玉鉴前序》

“数一而已，一者万物之所从始，故易一，太极也。一而二，二而四，四而八，生生不穷者，岂非自然而然之数邪？河洛图书泄其秘，黄帝九章著之书。其章有九，而其术则二百四十有六，始方田终勾股，包括三才，旁通万有，凡言数者皆莫得而逃焉。如易之大衍，书之历象，诗之万亿及秭，礼记之三千三百，周官之三百六十，数之见于经者，盖不特黄帝九章为然也。自后世明算之科不设，而此学浸失其传。由是历法之进退畸盈、农田之方圆曲直，以至斗升勺合，毫厘丝忽，往往皆不能尽其法者，又岂非古学之无传而学者莫知所依据邪？燕山松庭朱先生以数学名家周游湖海二十余年矣。四方之来学者日众，先生遂发明九章之妙，以淑后学。为书三卷，分门二十有四，立问二百八十有八，名曰

《四元玉鉴》。其法以元气居中，立天元一于下，地元一于左，人元一于右，物元一于上，阴阳升降，进退左右，互通变化，错综无穷。其于盈朒，隐互、正负、方程、演段、开方之术，精妙元绝。其学能发先贤未尽之旨，会万里而朝元，统三才而归极，乘除加减，钩深致远，自成一家之书也。方今尊崇算学，科目渐兴，先生是书行将大用于世，有能执此以往，则古人格物致知之学，治国平天下之道，其在是矣。有志于学者，可不服膺此书云？大德癸卯上元日，临川前进士莫若序。"

3. 祖颐《松庭先生四元玉鉴后序》

"黄帝九章以降，算经多矣，不可枚举。唐宋设明算科，立法取士，不出九章、周髀、海岛、孙子、张邱建、夏侯阳、五曹、五经算、缉古、缀术数家而已。然天、地、人、物四元罔有云及一者。厥后平阳蒋周撰《益古》、博陆李文一撰《照胆》、鹿泉石信道撰《钤经》、平水刘汝谐撰《如积释锁》，降人元裕细草之，后人始知有天元也。平阳李德载因撰《两仪群英集臻》，兼有地元，霍山刑先生颂不高弟刘大鉴撰《乾坤括囊》，末仅有人元二问。吾友燕山朱汉卿先生演数有年，探三才之赜，索九章之隐，按天、地、人、物立成四元，以元气居中，立天勾、地股、人弦、物黄方，考图明之。上升下降，左右进退，互通变化，乘除往来，用假象真，以虚问实，错综正负，分成四式，必以寄之剔之，余筹易位，横衔直撞，精而不杂，自然而然，消而和会，以成开方之式也。书成，名曰《四元玉鉴》，厘为三卷以象三才，四元以象其时，分门二十有四以象其气，立问二百八十有八假象周天之数，玉者比汉卿之德，术动则其声清远以长，静则乎户旁达而不有隐翳，鉴者照四元之形象，收则其缊昭彻而明，开则纵横发挥而曲尽妙理矣。汉卿名世杰，松庭其自号也。周流四方，复游广陵，踵门而学者云集。大德己亥编集《算学启蒙》，赵元镇己与之版而行矣。元镇者，博雅之士也，惠然又备己财，鸠工绣梓，俾之并行于世。前

成始，而今成终也。好事之德奚可量哉？二书相为表里，不其韪欤。属余为引，余详观之，有素所未尝接于耳目者，不用而用以之通，非数而数以之成，由是而知有数皆从无数中来，高迈于前贤，能尽其妙矣。明算君子据余言，试为细草，然后知诚而不妄也，于是乎书。大德登科[①] 二月甲子，滹纳心斋祖颐季贤父序。”

除上引三序外，还有二书的署名：前书为“松庭朱世杰编撰”，后书为“寓燕松庭朱世杰汉卿编述、临川琴屋钟煜叔明校正”。

这就是目前所能找到的有关朱世杰的全部资料，据此可大体勾勒出朱世杰的一个简况。

3 篇序有 3 位作者，还有 1 位校正，共 4 人。前 3 人，特别是赵元镇、祖颐都是朱世杰非常要好的朋友。这 4 个人涉及到 2 个地名和 2 个斋名。赵元镇的籍贯是惟扬，即扬州，莫若和钟煜的籍贯是临川，今江西省抚州市。2 个斋名分别是“滹纳心斋”和“琴屋”，后者比较容易理解，而前者则颇使人费思索。近来有人与蒙语联系起来，蒙语中把牧羊人呼为“呼拉沁”，与“滹纳心”很相近[②]。如果是这样的话，那么“滹纳心斋”可能是一种自谦的“牧羊人之家”的叫法。为什么不直接用“乎”或“呼”，而用“滹”？也许与滹沱河有关，于是变成了滹沱河旁的牧人之家。滹沱河当时是流经山西、河北的河流，原是天元术发达的地方。祖颐在后序中提到那么多与天元术发展有关的资料也许与其居住地有联系。

由此可知，朱世杰的朋友有北方的祖颐，有扬州的赵元镇，还有临川的莫若和钟煜，这几个人都没什么社会地位，莫若为前进

① “登科”，研究均认为是“癸卯”之误，此说甚确.

② 此事系田淼博士所说，是她于 1996 年 8 月在昆明出席“第三届中国少数民族科技史国际会议”时请教懂蒙语的特古斯的结果.

士，即南宋的进士；赵元镇是“学算”，此种说法已见于南宋的荣棨，他也自书“学算 ”，不是官名，有可能指学习算学的人。负责校正《四元玉鉴》的钟煜应当是一位精通数学的人，否则校正不了这部书，也可能是朱世杰在南方的学生。

朱世杰字汉卿，号松庭。他的籍贯应在北方，居住燕山。但燕山非行政区划，而是山名，位于河北遵化西南的一个山脉。又说“寓燕”，这个“燕”是何意？也不明确。只能大体说，朱世杰是今河北北部和北京一带人。他在北方学习了数学，成为一位有声望的数学家和教师，以教育为业周游四方，又复游广陵（扬州）。查元军于 1276 年进占扬州，朱世杰在广陵当在此年之后。他和赵元镇的相识可能是他在扬州期间，《算学启蒙》一书在那里定稿，而由赵元镇给作了一篇序，并出钱予以刊刻印刷。朱世杰是否去过临川？没有记载，可是其《四元玉鉴》有临川人莫若给作序，又有临川人给校正，恐非偶然。《四元玉鉴》复由赵元镇掏钱付梓，其贡献是很大的。

莫若的前序写于“大德癸卯上元日”，即大德七年正月十五日，而祖颐的后序写于“大德七年二月甲子”相当于大德七年二月初六日，而本年的正月是小尽，这样两序的写作时间，前后仅隔 20 天。因此，完全有理由认为朱世杰和赵元镇、莫若、祖颐、钟煜于大德七年二月集聚在一起，地点是扬州或临川，在扬州的可能性较大。实际上，形成了一个学术群体。

朱世杰一生以数学教育为业，到 1303 年已周游湖海 20 余年，可见他到过相当多的地方。假定他周游湖海 25 年，再按中国历史上学者成名稍晚的特点，开始时约为 30 岁左右，1303 年差不多 55 岁，以此推之，则他应生于 1249 年前后。此时金已灭亡 15 年了，所以他是元代人无疑。再按享寿 60 岁到 65 岁估算，朱世杰当于 1309 到 1314 年间去世。

根据上面的推测，朱世杰是在 50 岁及以后完成他的两部数学

著作的。

从 1127 年北宋灭亡时起，到 1279 年元朝统一中国时止，共 153 年处于南北分裂、对峙的状态，南北的学术交流几乎完全中止。在此情况下，数学研究自然形成两种不同风格。南方的数学大体上是沿袭了北宋的思想，重刊北宋出版的《九章算经》等古代数学著作，一方面对古典数学进行研究，一方面研究从生活生产实际中抽出的数学问题，同时又进行口诀化的推广。北方的数学，已如前述，以山西、河北一带地区逐渐形成了有关天元术的研究。从李冶的著作看，无任何口诀，也不如南方那样接近实际。如果把李冶的著作同秦九韶著作、杨辉著作进行对照，那么可以看出：它们的风格迥然不同。

年轻时代生活在北方的朱世杰，当然接受的是北方数学的薰陶，在他的两部数学著作中明显反映着北方的传统，而且继承和发展了北方数学，使之达到顶峰。但是同时他也吸收了南方的数学，在其《算学启蒙》中大体上可以看到杨辉的影子。此书出版时距杨辉最后一部著作的年代仅相距 24 年，杨辉可能刚去世不久。杨辉的著作较多，又注意培养人和推广数学知识，朱世杰到南方时不能不知道，不能不受其影响。朱世杰在《算学启蒙》中颇注意口诀和诗词，可以做为一个例证。

根据以上的情况和分析，朱世杰是南北数学风格汇通的第一人，而且是以北方数学为主干而完成汇通工作的。他虽然没有接受（大约是未接触到）秦九韶的数学，但在一定意义上来说，其工作具有总结性质，而中国传统数学的发展到此已告一段落。

宋元数学与《九章算术》等著作相比，在著作中注意预备知识[①]，而朱世杰的两部著作在这方面表现得最为突出，以下将会看

---

① 李迪．宋元时期数学形式的转变．中国科学技术史论文集（一）．呼和浩特：内蒙古教育出版社，1991．219～233

到。

还要注意到，祖颐所说的“二书相为表里”。实际上，《算学启蒙》为表，它是普及性著作，差不多涉及到数学的各个方面，但都不太深；《四元玉鉴》为里，它是一部专题性的学术专著，一般人不易看懂，祖颐就说：“明算君子据余所言，试为细草，然后知诚而不妄也。”由于该书艰深，他渴望有人能为其“试为细草”。这个愿望落空了，一直过了500多年，到清朝才有人做为对古籍研究时“试为细草”。可以说在500多年中没人研究，有明一代的数学家连朱世杰这个人都不知道，更不用说其著作了，不亦悲乎!?

有关朱世杰两部数学著作在国内的流传将在本《大系》第八卷讲述，此处从略。

这里还要附带说一下，所引录的三篇序，不仅是研究朱世杰的第一手资料，而且也是元代数学史的不可或缺的重要文献。其中除与朱世杰直接有关的资料外，还有两方面的内容：其一是提供了极其重要的天元术的发展线索，这是每一本涉及元代数学的著作差不多都要引用的材料；其二是在一定程度上反映了当时的数学思想，特别是元朝的统治已完全巩固的情况下的数学思想。例如三篇序的作者都推崇《九章算术》，并重述“九数”的传统观点。对所谓“数一”进行了解释，但是一人引自老子，一人则出于“易”。说明传统思想在当时已占统治地位。赵元镇说：《算学启蒙》“是书一出，为算法之标准，四方之学者归焉，将见拔茅连茹，以备清朝之选云。”只有在和平稳定的情况下才能有这样一些想法。

第二节 《算学启蒙》的体例与特点

《算学启蒙》分上、中、下3卷，20门，凡259问，每门都有专门名称，概括说明各门问题的算法类型。它们是：

上卷 8 门 113 问

纵横因法门 8 问	身外加法门 11 问
留头乘法门 20 问	身外减法门 11 问
九归除法门 29 问	异乘同除门 8 问
库务解税门 11 问	折变互差门 15 问

中卷 7 门 71 问

田亩形段门 16 问	仓囤积粟门 9 问
双据互换门 6 问	求差分和门 9 问
差分均配门 10 问	商功修筑门 13 问
贵贱反率门 8 问	

下卷 5 门 75 问

之分齐同门 9 问	堆积还源门 14 问
盈不足术门 9 问	方程正负门 9 问
开方释锁门 34 问	

在卷前有“总括”18 项，也各有名称，即

释九数法、九归除法、斤下留法、明纵横诀、大数之类、小数之类、求诸率类、斛斗起率、斤秤起率、端匹起率、田亩起率、古法圆率、刘徽新术、祖之密率、明异名诀、明正负术、明乘除段、明开方法。

总括 18 项是全书的预备知识，在正文中用到便直接使用，不再进行说明。下面有选择地加以介绍。

“斤下留法”，其下有自注说：“斤下带两者，当以十六约之，今则就身以此代之也。”即不需使用时现用 16（两）除，而是把不足斤的各两均除出来编成如下的 15 句口诀：

一退六二五　　　1 两$=\frac{1}{16}=0.0625$

二留一二五　　　2 两$=\frac{2}{16}=0.125$

三留一八七五　　$3\text{两}=\frac{3}{16}=0.1875$

四留二五　　$4\text{两}=\frac{4}{16}=0.25$

五留三一二五　　$5\text{两}=\frac{5}{16}=0.3125$

……　　……

十五留九三七五　　$15\text{两}=\frac{15}{16}=0.9375$

中间的 9 句，读者很容易补上，不需要再举。第一句为什么叫“一退六二五”，其余全在“退”字处为“留”？主要是指算出的结果要向后退一位，变为单位后的第二位。

“斤秤起率”，讲重量单位及进位：

衡起于黍〔形大如粟〕

十黍谓之一丝　　1 丝=10 黍

十丝谓之一铢　　1 铢=10 丝

六铢谓之一分　　1 分=6 铢

四分谓之一两　　1 两=4 分

十六两谓一斤　　1 斤=16 两

十五斤谓一秤　　1 秤=15 斤

三十斤谓一钧　　1 钧=30 斤

四钧谓之一硕〔重一百二十斤〕

　　1 硕=4 钧

这里有两个问题要说明：首先是 1 两=4 分=24 铢；其次是硕这个单位相当于以前的石，在《算学启蒙》的正文部分用到了硕。

“求诸率类”：

两求铢二十四乘　　24×两数=铢数

铢求两二十四除　　铢数÷24=两数

斤求两身外加六　　在 1 斤的 1 后加 6，变成 16 两

两求斤身外减六	在 16 两中减去 6，变成 1 斤
秤求斤身外加五	
斤求秤身外减五	
据物卖钱而用乘	物的单价×物数=总钱数
据钱买物而用除	总钱数÷物的单价=物数
“古法圆率”	$\pi\approx3$

“刘徽新术”，下有注称：“刘徽乃魏人也，立此新术以究圆之幽微。”新术为$\pi\approx\frac{157}{50}=3.14$。

“冲之密率”，下有注称：“冲之姓祖，乃宋南徐州从事史，立此密率亦究圆之微也。”其值为$\pi\approx\frac{22}{7}$。按：祖冲之有两个分数值，即$\frac{355}{113}$和$\frac{22}{7}$，他自己称前者为“密率”，后者为“约率”。可是唐代李淳风在注释《九章算术》时，却把$\frac{22}{7}$称为“密率”，一直对后世有影响，朱世杰也不例外。

“明乘除术”，复述《九章算术》中的正负数加减法则，最后有一段注，对古书中“正无人负之，负无人正之，正无人正之，负无人负之”的“人”进行了辨正，指出“其无人者为无对也，无所得减则使消夺者居位也。‘人’作‘入’，非。”即“入”为“人”之误。

“明乘除段”，主要是讲长方形的长和宽（朱世杰叫“平”）的运算与定义，首次明确记载了正负数的乘法法则。设长方形的边长分别为a、b，且$b\leqslant a$，则有

长平相并曰和	和$=a+b$
长平相减曰较	较$=a-b$
长平相乘曰积	积$=ab$
自相乘之曰幂	幂$=a^2$（当$a=b$）
同名相乘为正	$(\pm a)\times(\pm b)=+ab$

异名相乘为负　　$(\pm a)\times(\mp b)=-ab$

平除长为小长　　小长$=\frac{a}{b}$

长除平为小平　　小平$=\frac{b}{a}$

小长平相并曰小和　　小和$=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

小长平相减余小较　　小较$=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$

小长平相乘得一步为小积

小积$=\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$

以上是总括的主要内容，其余的如“大数之类”需要说明一下。朱世杰说：“凡数之大者，天莫能尽，地莫能载，其数不能极，故谓之大数也。”这是他给“大数”的定义性说明，实是一种无穷大思想。他接着给出了一串数名，由“一”到“千万”为十进，以下则为万万进，如万万曰亿等等。值得注意的是用到了一些佛经中的数名，如恒河沙、阿僧祇、那由他、不可思议、无量数等，系首次出现在数学著作中。这也许表明朱世杰信奉佛教，或至少是对佛经较熟悉。对于“小数之类”也有与“大数之类”类似的说明：“凡数之小者，视之无形，取之无象，数亦不能尽，故谓之小数也。”实是直观上的无穷小思想。

在元代数学著作中有口诀，所见书中以朱世杰的《算学启蒙》为最早。不仅如此，在数学著作中，给一大类（门）写算法诗以前也不多见。在卷上前 5 门，开头均有诗，前 4 门各有七言四句诗一首，“九归除法门”为七言八句。以后各门均无诗，估计是由于不好编而略去。此类诗实难编写，因为它必须符合两个要求：一是能概括本门的基本算法；二是要有文学性，至少要押韵，例如“纵横因法门”的诗是：

此法从来向上因，但言十者过其身，

呼如本位须当作，知算纵横数目真。

本门8问都是乘法问题，很好编。这里最重要的是通过“释九数法”，念乘法口诀，第二句“但言十者过其身”是说如果念出十位数，如“二六一十二”，其中之“一十”就要进一位（过身）。第三句“呼如本位须当作”是说念出的数是本位的就把此数写在当位之下，如“二三如六”即是。结合8问之后的术文，则更易理解。“术曰：列物数在上，各以价钱从上因之，即得。合前问。”其余各诗大体如此，但是都不好理解，此处不再引了。

在《算学启蒙》中，许多题的术文中有“依图布算”的作法，是以前数学著作中所不见的。多出于有几个并列条件的问题中，列出已知数，在此基础上进行解题计算。“依图布算”首次出现于“求差分和门”第八问，该题如下：

“今有油一秤二斤三两半，欲点醮灯，只云四盏用油三两，三瓯[①]用油五两。须令盏数倍之瓯数。问：瓯、盏及油各几何？

答曰：

瓯八十七只［油九斤一两］，

盏一百七十四只［油八斤二两半］。

术曰依图布算

|||| 四盏	||| 三两
||| 三瓯	||||| 五两

[②]左行互乘右行，左上倍之，得一十八，左下得二十，并之得三十八为法。左行相乘得十二，为乘法列共油，通两内子得二百七十五两半，以十二乘之，得三千三百六为实，实如法而一，得瓯数，倍之为盏数也。〔求油者，以异乘同除求之。〕合问。”

为了清楚起见，把本题的基本思想再复述一下：有油一秤二斤三两半，用盏和瓯放油点灯，每四盏用油三两，每三瓯用油五

① “瓯”音欧，ōu，盆盂类的瓦器.

② 此式是按原书的位置印的，即上下读，并与其下的左行、右行之说相一致.

两，而盏数是瓯数的二倍。问瓯数、盏数及各用油数是多少。

此题的算法相当于《九章算术》中的“衰分术”，即用盏数和瓯数分配油数。在解题开始，首先要“依图布算”，改为现代形式和计算的前半过程如下：

	左行		右行	
$20=$	4	╲ ╱	3	上
	$\times$	╳		
$2\times 9=18$，$9=$	3	╱ ╲	5	下
	‖			
	12			

在原题中“左上倍之得一十八，左下得二十”有误，“上”、“下”需调换位置，即“左下倍之得一十八，左上得二十”。$18+20=38$ 作为分母，“左行相乘”得 $4\times 3=12$ 为“乘法”。“列共油通两内子得二百七十五两半”即把总油数变为两：

$$1\text{ 秤}=15\times 16=240\text{ 两}$$

$$2\text{ 斤}=2\times 16=32\text{ 两}$$

故“共油”一秤二斤三两半，为

$$240+32+3+0.5=275.5\text{ 两}$$

往下的计算相当于

$$\frac{12\times\text{共油两数}}{38}=\text{总瓯数}\ (x)$$

实为由比例式

$$x:12=\text{共油两数}:38$$

而来。求出 $x=87$，即瓯数，$2\times x=174$ 为盏数。

有了瓯数和盏数，便可通过“异乘同除”求得各自用油的总

量。所谓“异乘同除”就是比例的变形，如上面求瓯数时的计算即是。

提出本例的目的不在于具体计算过程，而是为了说明“依图布算”。通过这个例子可以初步体会到：“依图布算”是先把部分已知条件和题意写出“图”来，然后在此基础上进行解题计算，这等于是把部分已知条件放到眼前不动，时刻提醒解题过程要注意这些条件。本例的“图”非常简单，横竖各为二行，有的则较复杂，如竖行有三，横行有四，而且数字多达4位，列出“图”再“布算”就十分必要。可以说，这是朱世杰的一项创造。

还需要讨论的一个问题是，朱世杰用什么方法进行计算？这似乎是一个怪问题，因为按照传统观点，朱世杰应当使用算筹“布算”。实际上，问题并不能完全肯定。用算筹进行计算是中国的传统方法，它有自身的优点，如直观性强，演算灵便。但也有缺点，最主要的是演算过程不留任何痕迹，最后只剩下所得结果。如果演算者想回过头来检查一下是否有误，只能重新来。数学家为了解决这样的问题和其他因素，便用笔写记录演算过程，用筹码代替算筹。聪明的数学家会很快发现：可以用笔写计算，算筹成了无用的东西。换句话说，在宋元时期中国已经有了笔算[①]，仔细读一下秦九韶、李冶和杨辉等人的著作就会得到证实。不过筹算在宋元时期并未完全被抛弃。当时有些人、有些时候，仍在使用筹算，这有文献记载[②]。朱世杰的时代应是筹算和笔算并行时代，他一定很熟悉筹算，并能熟练运用，可是他也一定会笔算。而且主要使用笔算。他的“图”，无疑是笔写的。

元代已进入筹算衰退期，笔算尚未成熟。到了明代，由于珠

---

① 李迪．宋元时期数学形式的转变．中国科学技术史论文集（一）．呼和浩特：内蒙古教育出版社，1991．219～233

② 李俨．筹算制度考．中算史论丛（四）．北京：科学出版社，1955．1～8

算的普及，筹算便逐渐退出历史舞台。到明代后期，人们已不知筹算为何物了。

"方程正负门"最末1问和"开方释锁门"的后18问全用天元术列方程求解。这大体是《算学启蒙》一书的高深部分。

第三节　《算学启蒙》的成就

《算学启蒙》是一部综合性数学普及著作，问题内容和类型比较齐全而又不太深奥。几何问题较少，主要是算术和代数，与传统一样，所有的几何问题都是变成算术或代数而求出其数值结果。其中有些问题是仿照前人的问题编出来的，如"鸡兔"问题等。就整体来看，《算学启蒙》有较高水平，在某些方面有新的创造和成就。

《算学启蒙》卷下"堆积还原门"主要讲级数求和及其逆问题。其中前5问为求和，后6问为求和的逆问题，还有3问为球积问题，实与堆积无关。

第1问：今有茭草底每面五十四束，问：积几何？答曰：一千四百八十五束。

其求法是"副置五十四束，下位添一束，以乘上位，得二千九百七十，半之，得积合问。"相当于

$$1+2+\cdots+54=\sum_{i=1}^{54} i=\frac{1}{2}54\ (54+1)$$

一般地有

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{1}{2}n\ (n+1)$$

这就是"底子"数一面为n束，由此向上堆积，每上一层减一束，最上层为一束。实为求自然数前n项和。在历史上早已有之。

第4问：今有三角垛果子，每面底子四十四个。问：共积几

何？答曰：一万五千一百八十个。

其求法是：“列底子添三，以底子乘之，得数又添二，又以底子乘之，得九万一千八十为实，以六为法，实如法而一，合问。”相当于

$$1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}i(i+1)$$
$$=\frac{1}{6}n[n(n+3)+2]$$

其右端的$n[n(n+3)+2]$系由$n(n+1)(n+2)$而来，因而上式应为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}i(i+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

第5问：今有四角垛果子，每面底子四十四个。问：共积几何？答曰：二万九千三百七十个。

其求法是：“列底子添一个半，以底子乘之，得数又添半个，又以底子乘之，得八万八千一百一十为实，以三为法，实如法而一，合问。”相当于

$$1^2+2^2+3^2+\cdots n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{3}n[n(n+1\frac{1}{2})+\frac{1}{2}]$$

右端的$n[n(n+1\frac{1}{2})+\frac{1}{2}]$系由$n(n+1)(n+\frac{1}{2})$而来，因而上式应为

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

第4问和第5问已见于南宋杨辉的著作，但是在求法上朱世杰改变了形式。

求前n项和的逆问题，是指已知总和求末项，是朱世杰首次提出的。现举二例：

第8问：今有茭草积一千四百八十五束。问：底面几何？答

曰：五十四束。

其求法是："列积倍之，得二千九百七十为实，以一为从方，一为廉法，开平方除之，合问。"

设 x 为底面之个数，则有

$$x^2+x-2\ 970=0$$

解之，得 54。这是由 $\frac{1}{2}n\ (n+1)\ =1\ 485$ 而来，只要把 n 换成 x 就行了。

第 14 问："今有三角、四角果子（垛）各一所，共积六百八十五个。只云三角底子一面不及四角底一面七个。问：二色底子一面各几何？答曰：三角底面五个，四角底面一十二个。"

这是把二个问题合在一起，给出了共积数和三角垛一面（末项）的个数比四角垛一面（末项）的个数少 7 个，求它们的末项。很显然，只要求出其中之一的末项，问题就解决了。朱世杰经过一系列运算，先求出三角垛一面的个数。设其为 x，他通过方程

$$3x^3+48x^2+339x-3\ 270=0$$

求得 $x=5$。

上面两题，只是列出了方程，而未讲具体解法。下面讨论一下朱世杰的开方和解方程的方法。

"开方释锁门"的前 5 问都是开方问题，包括开平方、开立方、开四次方，还有对分数开方的处理。具体操作步骤和前人的增乘开方法本质上全同。朱世杰为了使读者了解开方（包括解方程）步骤，他在该门一开始在第 1 问和第 2 问的"术"中详细叙述了开方法。如第 1 问是求 $\sqrt{4\ 096}$（答曰：64），其开方术是：

"列幂四千九十六步为实，借一算于六步之下名曰廉法，常超一位至百步下止。乃上商六十于廉法之上，实数之下亦置六百，名曰方法。乃命上商除实三千六百，实余四百九十六。倍方法得一千二百，一退得一百二十，廉法再退。又上商四步于廉法之上，实

数之下亦置四步。方法得一百二十四，乃命上商除实，恰尽。合问。”

叙述得非常清楚，不需进行解释。

第 5 问是分数开四次方，原题为“今有积一百一十二万九千四百五十八尺六百二十五分尺之五百一十一。问：为三乘方几何？”也就是

$$\sqrt[4]{1\ 129\ 458\frac{511}{625}}=?$$

朱世杰是把被开方数变成假分数：“列全步通分纳子，得七亿五百九十一万一千七百六十一为实，以一为隅，三乘方开之，得一百六十三[乃每面方积分]。又列分母为实，以一为隅开三乘方而一，得五，报除，合问。”即

$$1\ 129\ 458\frac{511}{625}=\frac{705\ 911\ 761}{625}$$

分子分母分别开四次方，实即解两个四次二项方程

$$x^4-705\ 911\ 761=0,\ x^4-625=0$$

求出根再相除。实际上，相当于

$$\sqrt[4]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}$$

书中对多元方程组解法很有特点，下面举二例。

“方程正负门”第 1 问：今有罗四尺、绫五尺、绢六尺，值钱一贯二百一十九文；罗五尺、绫六尺、绢四尺，值钱一贯二百六十八文；罗六尺、绫四尺、绢五尺，值钱一贯二百六十三文。问：罗、绫、绢尺价各几何？答曰：罗九十八文，绫八十五文，绢六十七文。

其解法的基本思想和传统作法一致，不同的是解算的开始，先“依图布算”。由已知条件有

(左行)	(中行)	(右行)
𝍥 罗	𝍤 罗	𝍣 罗
𝍣 绫	𝍥 绫	𝍤 绫
𝍤 绢	𝍣 绢	𝍥 绢
𝍩𝍡𝍮𝍢	𝍩𝍡𝍮𝍧	𝍩𝍡𝍩𝍨

这是书中的原样，和秦九韶的形式相同，相当于下面的增广矩阵

$$\begin{array}{c} (右) \\ (中) \\ (左) \end{array}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 1\,219 \\ 5 & 6 & 4 & 1\,268 \\ 6 & 4 & 5 & 1\,263 \end{pmatrix}$$

再往下的演算基本上是传统的“直除法”，通过消元，依次求出绢、绫、罗的尺价。

上例是一多元线性方程组，还有多元高次方程组，请看下例：

“开方释锁门”第32问：今有立方、立圆、平方各一，共积一百二十七万七千七百二十四尺，只云立圆径不及立方面十四尺，却多平方面二十八尺。问：三事各几何？答曰：立方面九十八尺，立圆径八十四尺，平方面五十六尺。

朱世杰用天元术求解：“立天元一为立圆径
〇
𝍠
，加十四尺为立方面
𝍩𝍣
𝍠
。再自乘，又以十六乘之，得
𝍣𝍫𝍨〇𝍣
𝍱𝍣〇𝍧
𝍥𝍯𝍡
𝍩𝍥
，为十六段立方积，寄左。又列立圆径减二十八尺为平方面也
𝍪𝍧
𝍠
，自之，又以十六乘之，为十六段平方积
𝍠𝍪𝍤𝍬𝍣
𝍧𝍱𝍥
𝍩𝍥
，寄左。又列立圆径，再

自乘，九之，亦为十六段立圆积〇，三位并之，共为十六段积



𝍤𝍮𝍣𝍫𝍧，再寄。列共积十六乘之，与再寄相消，得开方式

𝍰𝍤𝍩𝍡
𝍥𝍰𝍧
𝍪𝍣
𝍪〇𝍫𝍧𝍯𝍠𝍫𝍥，立方开之，得立圆径。加不及即立方面，减多

𝍰𝍤𝍩𝍡
𝍥𝍰𝍧
𝍪𝍣

即平方面也。”

这个问题，按已知条件和所求，应有三元。设立方面（边长）为a，平方面（边长）为b，立圆径为D，已知条件的现代形式为

$$\begin{cases}D+14=a\\D-28=b\\a^3+b^2+\frac{9}{16}D^3=1\ 277\ 724\end{cases}$$

但朱世杰并没有通过解这个方程组求得答案，而是如上面所引的术文那样：选择了球的直径D做为未知量，用天元术获得一个只含一个未知量D的三次方程

$$24D^3+688D^2+8\ 512D-20\ 387\ 136=0$$

解之，有$D=84$。由此可得$a=98$，$b=56$。

对于朱世杰使用天元术有二点需要指出：一是未记“元”或“太”，而从叙述中能体会出来；一是“元”在“太”下，尽管未记任何一字，可是仍能明确常数项和非常数项的位置，不致出现

混淆。因此，这是一种简化，“元”在“太”下是李冶在《益古演段》中所采用的记法。实际上由开方式本身即可判明。

朱世杰在使用天元术时特别灵活，需要怎样立天元就怎样立，在何处立天元更方便就在何处立。因此，他能很巧妙地处理无理方程、分式方程等等。

“开方释锁门”第 23 问：“今有直田长平相乘，平方开之得数加长平和得一百二十九步，只云差三十九步。问：长、平各几何？答曰：平二十五步，长六十四步。”

设 a、b 分别为直田的长、平，由题设条件有

$$\begin{cases}\sqrt{ab}+(a+b)=129\\ a-b=39\end{cases}$$

这里出现了无理式$\sqrt{ab}$，因而$\sqrt{ab}+(a+b)=129$为无理方程。

朱世杰恰当地立天元一为$(a+b)$，很容易地化为有理方程，具体作法是

“立天元一为和 ○ / | ，以减先云，余为开方数 |=Ⅲ / 𠄌 ，自之，就分四之为四段直积 丅⊥||||⊥|||| / —○≡𠄌 / |||| 。又加差幂得式 丅≟○≟||||| / —○≡𠄌 / ||||[①]，寄左。列和自之为和幂 ○ / ○ / | ，与寄左相消，得开方式 丅≟○≟||||| / —○≡𠄌 / ||| 。平方开之，得和八十九步。减差，半之，得平；加差，半之，即长。合问。”

译为现代形式，则为

---

① 各版本将“||||”误为“𠄌”，今依罗士琳改正。

设 x 为 $(a+b)$，由上面的第一个方程有

$$129-x=\sqrt{ab}$$

两端自乘，再以 4 乘之，得

$$4(129-x)^2=4ab$$

或

$$4x^2-1\ 032x+66\ 564=4ab$$

又加差幂 $(a-b)^2=39^2$ 于上式两端，有

$$4x^2-1\ 032x+66\ 564+39^2=4ab+(a-b)^2$$

把右端加以整理得 $(a+b)^2$，于是上式变为

$$4x^2-1\ 032x+68\ 085=(a+b)^2$$

但 $(a+b)^2=x^2$，即"和自之为和幂"，则上式又变为

$$3x^2-1\ 032x+68\ 085=0$$

解此方程，得 $x=89$。由此可求出 a、b。

类似这样的无理方程，在《算学启蒙》中还有一些。朱世杰所求得的解都是正确的。可是他在解算过程中用平方的办法把无理方程化为有理方程，很可能导致增根，而朱世杰没有注意到此点①。

"开方释锁门"第 19 问是一个多次立天元的例子，本问题是："今有直积一千二十四步，只云平除长、长除平二数相并得四步二分半。问：长、平各几何？答曰：平一十六步，长六十四步。"

沿用以前所设，则此题相当于解下面的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=4.25\\ ab=1\ 024\end{cases}$$

看来这个方程组很简单，如用通常方法求解并不省事。朱世杰用

① 王艳玉. 朱世杰的"多次立天元法". 数学史研究文集（第一辑）. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1990. 83～93

二次立天元方法只有几步就解决了。他的方法是：

“立天元一为小平，减云数，余为小长，以小平乘之为小积，与小积一算相消，得开方式，平方开之，得小平二分五厘。再立天元一为大长，以乘小平为大平，以大长乘之为大积式，与元积相消，得开方式，平方开之，得大长，以小平乘之即大平，合问。”

这段术文的意思是：设 $x=\frac{b}{a}$（小平），“减云数”4.25，即 $4.25-x$ 为小长。因小长×大长=1，故 $x(4.25-x)=1$，于是有方程

$$x^2-4.25x+1=0$$

解之，$x=0.25$。

又设 $a=y$ 为大长，则有 $y\times y\times x=1\ 024$，而 $x=0.25$，于是有二项方程

$$0.25y^2=1\ 024$$

解之，$y=64$，为大长。小长为16。

这样处理，充分反映出朱世杰的数学才能，不仅有很大的技巧性，而且是他的一项创造。在解题过程中还涉及到小数记法，纯小数可以独立存在，因为在小数前边加了“〇”。但是混合小数必须和上下数的相应位数对齐才行，而不能独立。实际上，和秦九韶、李冶的表示法基本相同，由此可以说明这是宋元时期用筹码表示小数的普遍方法。在开方式（方程）中这样表示小数是一种很先进的方法，如果在整数后面加上一个什么记号，便可任意书

写小数了。可惜的是，中国没有走到这一步。

在《算学启蒙》中，也有对方程中的分数根的处理，以及其他问题等等，不再介绍了。

《算学启蒙》的思想是其下一部著作的开端，其中有些问题已为四元术的建立铺平了道路。在堆积问题方面更是给出了先驱性的工作。《算学启蒙》与《四元玉鉴》互为表里，二者是由浅入深的关系极密切的姊妹篇。

第二章 四元术与高次方程

本章首先对朱世杰的四元术著作《四元玉鉴》进行讨论，然后对四元术本身和高次方程问题予以论述。

第一节 《四元玉鉴》综论及四元术的建立

《四元玉鉴》一书不仅是朱世杰的代表作，而且也是中国历史上的数学杰作之一，已得到国内国际的公认。本书的编排、结构系承袭其《算学启蒙》而来，也是在卷下分为若干门，每门包括若干问，正卷之前有卷首。总 24 门，凡 288 问，每门都有名称，各卷的分布如下：

卷首

假令四草，四问①

上卷七门，计七十五问②

直段求源，一十八问	混积问元，一十八问
端匹互隐，九问	廪粟回求，六问
商功修筑，七问	和分索隐，一十三问

中卷十门，计一百三问

如意混和，二问	方圆交错，九问
三率究圆，一十四问	明积演段，二十问
勾股测望，八问	或问歌象，一十二问

① 卷首除“假令四草”外还有其他一些项目，但各版本的目录中未列出.

② 包括了“假令四草”的 4 问，有的版本把这 4 问做为上卷的一门.

茭草形段，七问　　箭积交参，七问

拨换截田，一十九问　　如像招数，五问

下卷八门，计一百一十问

果垛叠藏，二十问　　镇套吞容，一十九问

方程正负，八问　　杂范类会，一十三问

两仪合辙，一十二问　　左右逢元，二十一问

三才变通，一十一问　　四象朝元，六问

卷首，除上面提到的“假令四草”外，还有“古今开方会要之图，图一”、“四元自乘演段之图，图二”、“五和自乘演段之图，图三”和“五较自乘演段之图，图四”4 项，其中第一项又分为“梯法七乘方图”（图 4.2.1）和“古法七乘方图”（图 4.2.2）二图。卷首的 5 项内容是全书几大类问题的预备知识，但和《算学启蒙》的预备知识完全不同，那里的预备知识都很浅显，如从九九口诀开始，并且比较零碎，这是由该书的普及性所决定的；而这里的预备知识是很整齐的 5 项，第一项是关于开方、解高次方程的预备知识；第二至第四项是关于勾、股、弦或它们间的和较关系，并与四元术联系在一起，和以后造题紧密相

梯法七乘方圖

正者為從負者為益

不動數	商置數	第一等	定實位
方位法	進退一	第二等	除實法
第一廉	進退二	第三等	平方隅
第二廉	進退三	第四等	立方隅
第三廉	進退四	第五等	三乘隅
第四廉	進退五	第六等	四乘隅
第五廉	進退六	第七等	五乘隅
第六廉	進退七	第八等	六乘隅
第七廉	進退八	第九等	七乘隅

图 4.2.1　梯法七乘方图

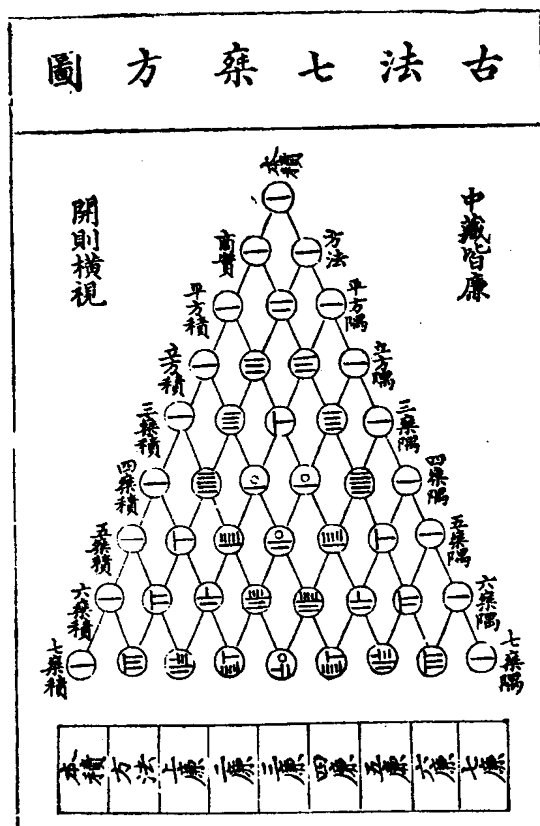


图 4.2.2　古法七乘方图

联；第五项则给出了由一元到四元的解法的例子各一个。但是第一项又和某些类型的垛积有关，将在本编第三章进行讨论。

“古法七乘方图”是贾宪“开方作法本源”的自然推广，贾宪有解释，说明“开方作法本源”的构成，本质上与现代二项式展

开的系数表的造法不同①。朱世杰没有如贾宪那样的解释，可是在“古法七乘方图”之前加了一幅“梯法七乘方图”，起了解释的作用。把它和“古法七乘方图”配合起来便看出问题了。

所谓“七乘方”相当于现代的8次方，由下往上形成阶梯状，故朱世杰称为“梯法”。“梯法七乘方图”上下并列4行，横排9行。竖行的右行相当于“古法七乘方图”最下的一排文字，左行相当于其右斜行，而左第2行大约是指由零次乘方到8次乘方，因当时没有零次方的概念，故称为“第一等”，而其下的“第二等”则应是一次方，一直排下去，到“第九等”。右第2行的意义不很明显，可能是指开方时的进退位。如开立方，借算（隅）要三位三位的进，开出一位数后便要方法一退、廉二退、借算三退，这就是“进退三”。

在中国传统数学中求高次方程的近似根就是开高次方。因此，把解方程也叫开方，如解 $n+1$ 次方程叫“开 n 乘方”或“n 乘方开之”，朱世杰和他的前辈们一样，都是这种叫法。在上一章讲述《算学启蒙》时已遇到过这样的例子。

“四元自乘演段之图”（图4.2.3）是相当重要的一个图，它由勾股形的勾、股、弦的演算构成，而且用以解说四元术。为明显起见，把原图改为现代形式（如图4.2.4）。

朱世杰说：“凡习四元者，以明理为务，必达乘除、升降、进退之理，乃尽性穷神之学也。仆立勾三、股四、弦五、黄方二为问，并之得 |，自乘为幂，

|太|
|

① 参见李迪.《中国数学通史》宋元卷. 南京：江苏教育出版社，1998

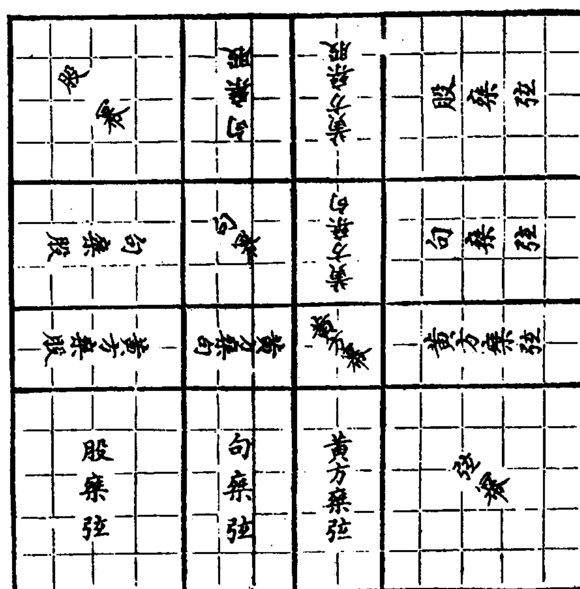
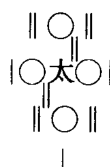


图 4.2.3　“四元自乘演段之图”

得此式  ，共计一十六段，计幂一百九十六步，考图认之，其理显然。”

	y	x	w	z
y	y^2	xy	yw	yz
x	xy	x^2	xw	xz
w	yw	xw	w^2	zw
z	yz	xz	zw	z^2

图 4.2.4　上图的现代形式

设 x、y、z、w 分别代表四元，并按莫若所说：“其法以元气居中，立天元一于下，地元一于左，人元一于右，物元一于上”，则上

引“并之”，即 $x+y+z+w$ 的分布位置如图所示（图 4.2.5a、b）那样，此和式的“自乘幂”，即

$$(x+y+z+w)^2$$
$$=x^2+y^2+z^2+w^2+2xy+2xz+$$
$$2yz+2xw+2yw+2zw$$

右端各项的位置如图 4.2.6，和图 4.2.5 相对应，也和原图一致。因为朱世杰已给出 $x=3$，$y=4$，$z=5$，$w=2$，故 $x+y+z+w=3+4+5+2=14$，亦即 $(x+y+z+w)^2=14^2=196$。这就是由 3+4+5+2=14 为一边作成的正方形的面积为 196（平方步），它由 16 块平面构成，其中 4 个正方形，12 个长方形（6 对），与图对照一看即明。

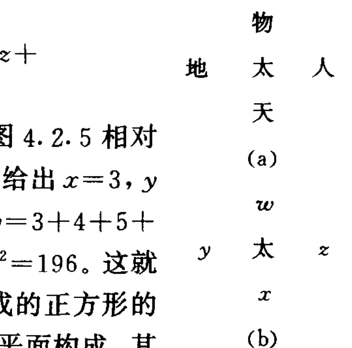


图 4.2.5

由图 4.2.6 可知，单独的 x、y、z、w 及其各次乘方的位置是直接向上、下、左、右延伸，像天元术那样从低方次向高方次直线排列，相邻两元的乘积放在两元排列的交叉点上，如 xy 的二元 x、y 均为一次，由太向下的第一横行上都是 x 一次方，太的左侧第一竖行上都是 y 的一次方，这两行的交叉点上就是 xy，其系数为 2，就写上 $2xy$。但是太上下两元相乘或左右两元相乘，如 xw、yz 便无合适位置了，于是只好放在某夹缝里。这反映出：由天元术发展到四元术已出现了排列位置上的困难，用同样方式建立五元术或高于五元术已是不可能的了。然而，此点并不能掩盖朱世杰在建立四元术方面的卓越贡献。

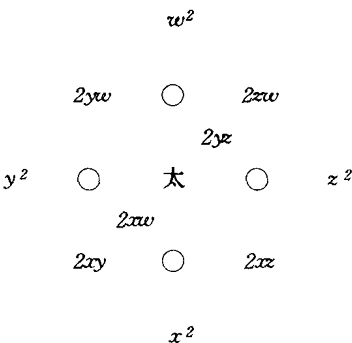


图 4.2.6

“五和自乘演段之图”（图 4.2.7）和“五较自乘演段之图”，从本质上说并不重要，但是在以后题目中经常用到，有些题竟是由此两图中的某几部分造出，因此需要简单介绍。

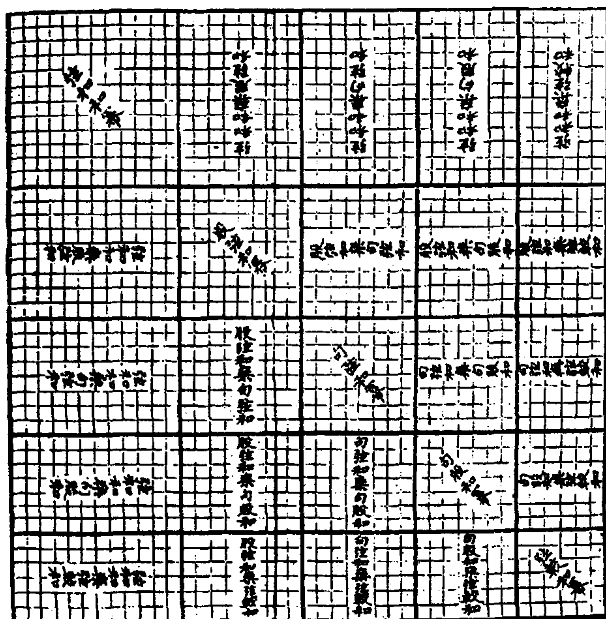


图 4.2.7 “五和自乘演段之图”

朱世杰说：“今言五和者，勾股和、勾弦和、股弦和、弦和和、弦较和，并之，得四十二步，自乘得一千七百六十四步，共为二十五段也。”设 x、y、z 分别为勾、股、弦，并以 m_1、m_2、m_3、m_4、m_5 代表“五和”，同时代入前面所设之数字，则有

$$m_1=x+y=3+4=7,$$

$$m_2=x+z=3+5=8,$$

$$m_3=y+z=4+5=9,$$

$$m_4=5+(3+4)=5+7=12,$$

$m_5=5+(4-3)=5+1=6$。

“五和”并之，再自乘，有

$$(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)^2=42^2=1\ 764。$$

图4.2.7是以m_1、m_2、m_3、m_4、m_5 5个线段的和为边所成之正方形，这又自然地形成25块，亦即“共为二十五段”。现将图4.2.7用现代形式表示，如下图（图4.2.8）。

弦和和 $z+(x+y)$	股弦和 $y+z$	勾弦和 $x+z$	勾股和 $x+y$	弦较和 $z+(y-x)$	
$[z+(x+y)]^2$	$[z+(x+y)]\times(y+z)$	$[z+(x+y)]\times(x+z)$	$[z+(x+y)]\times(x+y)$	$[z+(x+y)]\times[z+(y-x)]$	弦和和 $z+(x+y)$
$[z+(x+y)]\times(y+z)$	$(y+z)^2$	$(y+z)\times(x+z)$	$(y+z)\times(x+y)$	$(y+z)\times[z+(y-x)]$	股弦和 $y+z$
$[z+(x+y)]\times(x+z)$	$(y+z)\times(x+z)$	$(x+z)^2$	$(x+z)\times(x+y)$	$(x+z)\times[z+(y-x)]$	勾弦和 $x+z$
$[z+(x+y)]\times(x+y)$	$(y+z)\times(x+y)$	$(x+z)\times(x+y)$	$(x+y)^2$	$(x+y)\times[z+(y-x)]$	勾股和 $x+y$
$[z+(x+y)]\times[z+(y-x)]$	$(y+z)\times[z+(y-x)]$	$(x+z)\times[z+(y-x)]$	$(x+y)\times[z+(y-x)]$	$[z+(y-x)]^2$	弦较和 $z+(y-x)$

图 4.2.8　“五和自乘演段之图”现代形式

同样地，进一步考虑“五较自乘演段之图”。朱世杰说：“夫算中元[①]妙，无过演段如积，幽微莫越认图。其法奥妙，学者鲜能造其微。前明五和，次辩五较，自知优劣也。其五较者，勾股

① “元”即玄.

较、勾弦较、股弦较、弦较较、弦和较，并之得一十步，自乘得一百步，共为二十五段，考图认之。”仿上面“五和”的作法，设 n_1、n_2、n_3、n_4、n_5 分别代表“五较”，并将具体数字代入，则有

$$n_1=y-x=4-3=1,$$
$$n_2=z-x=5-3=2,$$
$$n_3=z-y=5-4=1,$$
$$n_4=z-(y-x)=5-1=4,$$
$$n_5=(x+y)-z=7-5=2。$$

“五较”并之，再自乘，有

$$(n_1+n_2+n_3+n_4+n_5)^2=10^2=100$$

弦较较 $z-(y-x)$	弦和较 $(x+y)-z$	勾弦较 $z-x$	股弦较 $z-y$	勾股较 $y-x$	
$[z-(y-x)]^2$	$[z-(y-x)]\times[(x+y)-z]$	$(z-x)\times[z-(y-x)]$	$(z-y)\times[z-(y-x)]$	$(y-x)\times[z-(y-x)]$	弦较较 $z-(y-x)$
$[z-(y-x)]\times[(x+y)-z]$	$[(x+y)-z]^2$	$(z-x)\times[(x+y)-z]$	$[(x+y)-z]\times(z-y)$	$[(x+y)-z]\times(y-x)$	弦和较 $(x+y)-z$
$[z-(y-x)]\times(z-x)$	$(z-x)\times[(x+y)-z]$	$(z-x)^2$	$(z-y)\times(z-x)$	$(y-x)\times(z-x)$	勾弦较 $z-x$
$[z-(y-x)]\times(z-y)$	$(z-y)\times[(x+y)-z]$	$(z-x)\times(z-y)$	$(z-y)2$	$(y-x)\times(z-y)$	股弦较 $z-y$
$[z-(y-x)]\times(y-x)$	$(y-x)\times[(x+y)-z]$	$(z-x)\times(y-x)$	$(z-y)\times(y-x)$	$(y-x)^2$	勾股较 $y-x$

图 4.2.9　“五较自乘演段之图”现代形式

图 4.2.9 是以 n_1、n_2、n_3、n_4、n_5 5 个线段的和为边所成之正方形，

它又自然地“共为二十五段”。

在此两图中，x、y、z 即是三元，只是朱世杰没有明确指出罢了。在以后的例题中，我们将看到“五和”、“五较”和四元术题的构成关系。

在这里还要讲一下，由天元术到四元术的简单发展过程。如在第一章所引祖颐的记述，知李德载《两仪群英集臻》中“兼有地元”，显然是说在天元之外多了地元；刘大鉴在《乾坤括囊》中“末仅有人元二问”，但未说有天元和地元，按有此二元来考虑，便是三元。

二元术和三元术出现的时间不会太早，估计约在13世纪中后期，因为在李冶的著作中，特别是《敬斋古今黈》中仅提到天元术，而未及二元术、三元术，也未涉及到如李德载等人。很可能是在李冶致力于数学研究之后，才出现了二元术和三元术。

朱世杰经过认真研究，把三元术推广到四元术，并用“四元自乘演段之图”直观地说明四元的位置排列和意义。四元术的建立是朱世杰的重要成就之一。

第二节　四元术算题

《四元玉鉴》的“卷首”中最后一项“四象细草假令之图”，它包括由天元术到四元术各一题，并有简单的“草”，而无“术”。全书只有这4问如此，正文的问都是有“术”而无“草”。因此这4问叫做“假令四草”。朱世杰的此种做法，很可能是把这四问作为解题的样子，以后的问题便仿此解算。这4个样题的“草”仍过于简单，以至有些演算过程没有明确交待，使后人不好理解。从清代中期以来，不断有人补作细草，有的解法过程时至今日也没有公认的看法。

下面讨论“假令四草”。

“一气混元：今有黄方乘直积，得二十四步，只云股弦和九步。问：勾几何？答曰：三步。

“草曰：立天元一为勾，如积求之，得一百六十二个黄方乘直积式 太 ，以一百六十二乘元积，相消，得开方式 𝍢𝍰𝍧𝍰 ，

○	○
𝍦＝𝍨①	𝍦＝𝍨
𝍰 —	𝍰—
𝍨	𝍨
丨	丨

四乘方开之，得勾三步。合问。”

题中的“直积”是指由勾股形的勾、股为边构成的长方形面积。根据“四元自乘演段之图”中的假设，黄方为2，“黄方乘直积，得二十四步”，即2×直积＝24，所以直积为12，由此可知勾为3。又“只云股弦和九步”，也得勾为3。答案已经两次得出。朱世杰用天元术求解，他“立天元一为勾”，即设x为勾，最后归结到要解一个五次方程

$$x^5-9x^4-81x^3+729x^2-3\,888=0$$

解之，得$x=3$。

但是朱世杰在“立天元一为勾”之后，接着突然说“如积求之，得一百六十二个黄方乘直积式”，即是如下的多项式

$x^5-9x^4-81x^3+729$

中间省略了一些演算步骤，因此清代的罗士琳说：“其何以‘如积求之’之故，缺而未明”。

“两仪化元：今有股幂减弦较较与股乘勾等，只云勾幂加弦较和与勾乘弦同。问：股几何？答曰：四步。”

---

① 关于筹式的写法与排列均按原样，未改．下同．

本题的已知条件是给出了两个方程

股幂－弦较较＝股乘勾

勾幂＋弦较和＝勾乘弦

或

$$b^2-[c-(b-a)]=ab$$

$$a^2+[c+(b-a)]=ac$$

朱世杰对此问并不是只设天元，而是用二元术求解。

“草曰：立天元一为股，地元一为勾弦和，天地配合求之，得今式

```
‖̸ ○太
丅 ‖ ○
○ ‖ ○
○○ 丨
```

求到云式

```
‖ ○太
丅 ‖ ○
○○○
○○ 丨
```

互隐通分消之，内二行得式

```
太
Ⅲ
||||
```

外二行得

```
太
○
‖
丨
```

两位相消，得开方式

```
Ⅲ
‖̸
丨
```

平方开之，得股四步。合问。”

为了说明问题，把这段“草”译为现代形式。设 x 为股，即 $x=b$，y 为勾弦和，即 $y=a+c$，然后“天地配合求之”，得“今式”

$$x^3+2xy+2x^2y-2y^2-y^2x$$

再求到“云式”

$$x^3+2xy+2y^2-xy^2$$

“互隐通分消之”，“内二行”得

$$4x^2+8x$$

“外二行”得

$$x^3+2x^2$$

“两位相消”，得

$$x^3-2x^2-8x=0$$

此为一个三次方程式，但约去 x，有

$$x^2-2x-8=0$$

解之，得 $x=4$。

怎样“天地配合”和“互隐通分”，朱世杰都省略了。

“三才运元：今有股弦较除弦和和，与直积等，只云勾弦较除弦较和与勾同。问：弦几何？答曰：五步。”

此题的已知条件也是两个，即

$$\frac{弦和和}{股弦较}=直积，\frac{弦较和}{勾弦较}=勾$$

亦即

$$\frac{c+(a+b)}{c-b}=ab，\frac{c+(b-a)}{c-a}=a$$

求 $c=?$

朱世杰用三元术求解。

“草曰：立天元一为勾，地元一为股，人元一为弦。三才相配，求得今式 ⊤ 太 ⊤，求得云式 ⊤ 太 ⊤，求得三元之式 | 〇 太 〇 ⊤。

|　　|　|　　〇

⊤ 〇 ⊤　　⊤　　|

以云式剔而消之，二式皆人易天位，前得 | | ╫ 太，后得 | ╫ ‖ 太。

⊤ | ⊤　　〇╫ ||||╫

〇 | ‖　　〇〇 | ╫

互隐通分相消，左得 ∏ ⊤ 太，右得 |≡ | ≡ 太。内二行得

||| ╥　　|一 | ≡

⊤ ≡　　||||| | ≡

〇 |　　||||| | ≡

〇 ‖

，外二行得　。内外相消，四约之，得开方式　，

三乘方开之，得弦五步。合问。”

此草的现代形式是：设 x 为 a，y 为 b，z 为 c。“三才相配”，求得

$$-xy^2+xyz-y-x-z \qquad \text{“今式”}$$

$$-y-x^2+x+xz-z \qquad \text{“云式”}$$

$$x^2+y^2-z^2 \qquad \text{“三元之式”}$$

“以云式剔而消之，皆人易天位”，得

$$x^2+x-2-x^2z-xz-z+xz-2z^2 \qquad \text{“前式”}$$

$$x^3-2x^2+2x-2x^2z+4xz+xz^2-2z^2-2z \qquad \text{“后式”}$$

再“互隐通分相消”，得

$$-xz^2+3xz+7x+z^3-3z^2-7z-6 \qquad \text{“左式”}$$

$$-2xz^3+5xz^2+11xz+13x+2z^4-5z^3-15z^2-13z-14 \qquad \text{“右式”}$$

由左右二式的“内二行”得

$$-2z^6+11z^5+10z^4-43z^3-146z^2-157z-78$$

“外二行”得

$$-2z^6+11z^5+14z^4-67z^3-130z^2-133z-98$$

把上二式相减，再以 4 约之，得

$$z^4-6z^3+4z^2+6z-5=0$$

解此四次方程，得 $z=5$。

“四象会元：今有股乘五较与弦幂加勾乘弦等，只云勾除五和与股幂减勾弦较同。问：黄方带勾股弦共几何？答曰：一十四步。”

此题的两个已知条件中，“五较”和“五和”是指“五较并”与“五和并”，两个条件是

五较×股＝弦幂＋勾×弦

五和÷勾＝股幂－（弦－勾）

求勾＋股＋弦＋黄方。

按本章第一节所设，则已知条件的现代形式分别为

$$(n_1+n_2+n_3+n_4+n_5)\times b=c^2+ac$$

$$(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)\div a=b^2-(c-a)$$

而 $a+b+c+d$ 为所求。

朱世杰用四元术解此问题：

“草曰：立天元一为勾，地元一为股，人元一为弦，物元一为开数。四象和会求之，得今式 ╫ 太 |
〇 | 〇，求得云式 〇 |||| 太 ||||
╁ 〇 || |
〇 〇 ╁ 〇，求得三元之式 | 〇 太 〇 ╁
〇〇〇〇〇
〇〇 | 〇〇，求得物元之式 〇 ╁ 〇
|| 太 〇
〇 || 〇。四式和会，消而剔之，式皆物易天位，得前式 || ╲Ⅲ || ╧ 太
〇 ╁ ⊤ ╫
〇〇 〇 ╁，后式 ╥ 太
〇 ||。便为左行，以左行消后式 〇 || ≡ ||||
Ⅲ ||||
〇 ╫，便为右行。内二行得式 〇
〇
| ⊥，其外二行得式 || 〇 ≡ Ⅲ
|| ╁
|| ╧。内外二行相消，三约，得开方式 ⊥ Ⅲ ╲
╥
||||，平方开之，得一十四步。合前问。”

此草的现代形式是：设 x 为 a，y 为 b，z 为 c，w 为 $a+b+c+d$（d 为黄方）。"四象和会求之"，得

$x-2y+z$　"今式"

$2x-x^2+4y-y^2-4z+xz$　"云式"

$x^2+y^2-z^2$　"三元之式"

$2x+2y-w$　"物元之式"

再"四式和会，消而剔之，式皆物易天位"，得

$2y^3-8y^2+28y+6yw-w^2-2w$　"前式"

$-7y+2w$　"后式"

再经变换，消去 z，得下二式

$16w^2$

$28w^2-21w-2\ 058$

二式相减，以 3 约之，得

$$4w^2-7w-686=0$$

解之，得 $w=14$。

通过以上的例子可以看出：朱世杰的指导思想是把多元的几个多项式，经过若干次变换进行消元，最后得到一个一元高次方程，归结为解高次方程问题。在解题过程中，表现出其所用筹式笔算形式和现代形式的不同。从所引的草便显示出，多元的式子呈长方形数字阵。因此有内行、外行之称。为了叙述方便起见，朱世杰按一定的次序把多数的式子起了名字，如"今式"、"云式"等等。在"三才运元"和"四象会元"中，朱世杰都进行过"易位"，这是为了使最后所剩的元（未知数）到达和天元术的天元相同的位置，成为便于观察的习惯形式。

朱世杰所给出的草，在"立天元一"等之后省略了不少环节，特别是"剔而消之"和"互隐通分相消"都没有任何交待，可以说完全不知道他是如何进行的。在他之后的长达 500 多年里再无人提到他的这套解法，以致泯灭。到了清代中后期，由于形成研

究古算的热潮，便有罗士琳（1774～1853）、沈钦裴、陈棠、戴煦（1805～1860）等对四元术进行了深入研究，给《四元玉鉴》补作细草。但是这些细草是否符合朱世杰的原意，几乎无法判断。只能起某种验证的作用，以说明朱世杰的作法是正确的，就像用现代代数验证《九章算术》的方程那样，可是《九章算术》本身并不是现代的代数。因为《九章算术》的方程有较详细的解算过程，所以很容易判断现代代数的验证符合原意，而朱世杰的解法就不好说了。

可以这样推想：朱世杰在解决四元术问题时，肯定有一套他自己创造的行之有效的方法，甚至会含有某些近代数学的萌芽思想。可惜的是失传了。

综观《四元玉鉴》全书，绝大多数问题都是通过天元术求解的，二元及二元以上的问题，不算上举各题，分别有二元 33 问、三元 11 问、四元 6 问。它们有术而无草，且更为简略，下面从方程的角度进行讨论。

第三节　高次方程问题

在前面的讨论中，已不止一次地涉及到高次方程问题，但那时不可能展开详细探讨。

《四元玉鉴》中的 288 问，都要归结为解方程求出答案。从 1 次到 14 次，可以说是一部关于方程的专著。下面给出一个统计表（表 4.2.1）：

表 4.2.1　《四元玉鉴》高次方程统计表

卷次＼次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	合计
上	1	28	14	21	9	4	1	3	1	1					83
中	22	46	38	26	5	4	1	2							144

续前表

下	12	49	28	27	6	7	1		1	1	1	1		1	135
合计	35	123	80	74	20	15	3	5	2	2	1	1	0	1	362

从此表可以看出：形成了一个方程系统。朱世杰对高次方程的研究达到了极高的水平，他首先把一次方程纳入其中，而且大都立天元，得出方程后求解时有两种叫法：一是“上实下法而一”，一是“开无隅平方而一”。这第二种叫法是指缺二次项的二次方程，其叫法有重要性。明显的把1次方程与高次方程等量齐观了。他把解方程叫做“开”，把解一次方程叫“开元隅平方”，例如“一千八为益实，一百四十四为从方，开元隅平方而一”，就是解

$$144x-1\ 008=0$$

所谓“而一”即以144去除1 008。在二次方程中x^2项叫“隅”，“无隅”就是无二次项。

朱世杰把所求的数叫“开数”。在一个方程中，根据需要可以设三、四个未知数，而其中往往只有一个是开数，相当于现代代数中方程的根。如下面的例子：

卷下“三才通变”第三题：“今有平乘积如长而一，所得减一平三较，余与平等。只云长乘和减平与二积一较同。问：和幂弦幂较幂带一积一长一平六事连环得几何？答曰：九十四步。”

“术曰：立天元一为勾、地元一为股，人元一为开数，三才相配求之，得一百八十八为正实、九十六为益方、一为正隅，平方开之。合问。”

这段术是：设x为勾、y为股、z为所求之根（开数），经过“三才相配求之”，得方程

$$z^2-96z+188=0$$

开之，得开数$z=94$。

在《四元玉鉴》中有一批题，由于所求之答案较多，朱世杰采取各自立天元，有的多达 9 个方程，都是分别求解。

卷上“廪粟回求”第六题，要求 7 个答数，6 次立天元，解 6 个五次方程，叫做“四乘方开之”。这些方程是

$$x^5-13x^4+82x^3-18x^2+2\,313x-52\,893=0$$

$$x^5+936x^4-48x^3-8\,992x^2-44\,460x-146\,112=0$$

$$4x^5-96x^4+936x^3-4\,496x^2+11\,145x-18\,264=0$$

$$x^5-148x^4+8\,776x^3-260\,352x^2-3\,863\,340x-230\,112=0$$

$$x^5+92x^4-3\,400x^3+63\,360x^2-600\,876x+2\,302\,992=0$$

$$x^5+2x^4+16x^3+288x^2+3\,420x-44\,712=0$$

卷中“如意混合”第二题，要求 9 个答数，9 次立天元，解 9 个三次方程。不详列举。

《四元玉鉴》中还有这样问题，即在已知条件中便包括一个待解的方程，而要求它的根与其他条件在一起求出问题的答案。卷下“四象朝元”第六题就是这样的例子，该问又是全书中次数最高（14 次）的方程，非常典型。现将该题录于下，然后进行必要的讨论。

“今有一数不知多少，但言五较各自乘，并之为正实，以三为益方，一为从上廉，一为从下廉，二为益隅，三乘方开之，与其数相等。只云勾股和幂减二直积加三相和与其数幂自乘并弦幂减股相同。又云半之三相和加黄方与其数再自乘，亦等。问：元数几何？答曰：二步。

“术曰：立天元一为勾，地元一为股，人元一为弦，物元一为开数。四象和会求之，得一千一百五十二为正实，七百六十八为益方，六百四十为益上廉，一千七百九十二为从二廉，三百八十四为益三廉，九千八为益四廉，一万九千一百一十二为从五廉，八千七百九十九为益六廉，八千七百九十五为益七廉，一万二千六百三十七为从八廉，二千三十为从九廉，一万九千一百六十八为

益十廉，二万二千二百九十二为从十一廉，一万一千一百一十二为益十二廉，二千六为正隅，十三乘方开之，得二步，即元数也。合问。”

此题给出了3个已知条件，求一个数。第一个条件是如下的4次方程

$$-2r^4+r^3+r^2-3r+\sum_{i=1}^{5}n_i=0$$

再设所求之数为w_0，此方程之根为r_0，已知$r_0=w_0$

第二个条件是

$$(a+b)^2-[2ab+(a+b+c)]=w_0^4+c^2-b$$

第三个条件是

$$\frac{a+b+c}{2}+d=w_0^3$$

实际上，由这三个条件中的任何一个条件都能顺利求出要求的数，不必进一步去解更高次方程。可是朱世杰为了要利用四元术，造出了一个这样的模型。他设天元一（x）为勾，地元一（y）为股，人元一（z）为弦，物元一（w）为开数，再经“四象和会求之”，有如下方程：

$$2\,006w^{14}-11\,112w^{13}+22\,292w^{12}-19\,168w^{11}+$$
$$2\,030w^{10}+12\,637w^9-8\,795w^8-8\,799w^7+$$
$$19\,112w^6-9\,008w^5-384w^4+1\,792w^3-$$
$$640w^2-768w+1\,152=0$$

这是目前所知，我国数学史上最高次方程，在同时代的外国也未发现。它的筹式写法，包括开数在内有16个层次，现补写如下：

开数

𝍩𝍠𝍬𝍡 正实（常数项）

𝍦𝍮𝍧̸ 益方

𝍥𝍬̸〇 益上廉

𝍩𝍦𝍰𝍡 从二廉

𝍢𝍰𝍨̸ 益三廉

𝍱〇〇𝍧̸ 益四廉

𝍠𝍰𝍠𝍩𝍡 从五廉

𝍰𝍦𝍰𝍧̸ 益六廉

𝍱𝍦𝍰𝍨̸ 益七廉

𝍠𝍪𝍥𝍫𝍦 从八廉

𝍪〇𝍫〇 从九廉

𝍠𝍰𝍠𝍮𝍧̸ 益十廉

𝍡𝍪𝍡𝍰𝍡 从十一廉

𝍠𝍩𝍠𝍩𝍡̸ 益十二廉

𝍪〇〇𝍥 正隅（最高次项）

怎样由四元转化为一个一元14次方程，朱世杰只说“四象和会求之”这样一句话，接着给出了最后的方程，再未说其他演算。为了对朱世杰的工作有某种程度的了解，罗士琳给本题所补作的细草也许有一定帮助，下面把该补草用现代形式予以叙述。

设 x 为勾，y 为股，z 为弦，w 为开数。x^2 为勾幂，y^2 为股幂，z^2 为弦幂，xy 为直积，$x+y$ 为勾股和，$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ 为勾股和幂。$x+y+z$ 为三相和。$y-x$ 为勾股较，$(y-x)^2=y^2-2xy+x^2$ 为勾股较幂。$z-x$ 为勾弦较，$(z-x)^2=z^2-2xz+x^2$ 为勾弦较幂。$z-y$ 为股弦较，$(z-y)^2=z^2-2yz+y^2$ 为股弦较幂。于是有

$z-(y-x)$ 弦较较

$[z-(y-x)]^2=z^2+y^2+x^2-2xy+2xz-2yz$　弦较较幂

$(x+y)-z$　弦和较

$[(x+y)-z]^2=x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$　弦和较幂

$x^2+y^2-z^2$　三元式

三元式与五较幂相加，得

$4x^2+4y^2+4z^2-2xy-2xz-6yz$　正实

$-3w$　益方

w^2　从上廉

w^3　从下廉

$-2w^4$　益隅

凡三正相并

$4x^2+4y^2+4z^2-2xy-2xz-6yz+w^3+w^2$

“于上”方、隅相并有

$$2w^4+3w$$

与上相消，有

$$4x^2+4y^2+4z^2-2xy-2xz-6yz-2w^4+w^3+w^2-3w \quad (1)$$

4 乘三元式，得

$$4x^2+4y^2-4z^2 \quad (2)$$

与（1）相消，即（2）－（1），有

$2xy+2xz-8z^2+6yz+2w^4-w^3-w^2+3w$　今式

倍直积：$2xy$，以减勾股和幂，得

$$x^2+y^2$$

加三相和，有

$$x^2+y^2+x+y+z$$

放在上边。

物元再自之，为 w^4，加弦幂，有 z^2+w^4，再以股减之，得 z^2+w^4-y，与放在上边式子相消，再消三元式，得

$$x+2y+z-w^4$$ 云式

倍黄方：2（$x+y-z$）$=2x+2y-2z$

与三相和相加，有 $3x+3y-z$。物元再乘，倍之，与上相消，有

$$3x+3y-z-2w^3$$ 物元式

与云式相消（加），有

$$4x+5y-w^4-2w^3$$ 甲式

倍弦乘物元式，有

$$6xz+6yz-2z^2-4zw^3$$

与今式相消，有

$$2xy-4xz-6z^2+4zw^3+3w-w^2-w^3+2w^4$$ 乙式

倍之，有

$$4xy-8xz-12z^2+8zw^3+6w-2w^2-2w^3+4w^4$$

与甲式相消，得

$$-8xz-5y^2-12z^2+8zw^3+2yw^3+yw^4+6w-2w^2-2w^3+4w^4$$ 丙式

倍物元式，有

$$6x+6y-2z-4w^3$$

3 乘云式，有

$$3x+6y+3z-3w^4$$

上二式相消，得

$$-3x+5z-3w^4+4w^3$$ 丁式

8 乘丁式，有

$$-24x+40z-24w^4+32w^3 \quad (3)$$

3 乘丙式，有

$$-24xz-15y^2-36z^2+6yw^3+3yw^4+24zw^3+18w-6w^2-6w^3+12w^4 \quad (4)$$

（3）（4）二式相消得

$$-15y^2-76z^2+6yw^3+3yw^4-8zw^3+24zw^4$$

$+18w-6w^2-6w^3+12w^4$[①] 上式

"物易天位"，即在筹式中把物元放到天元的位置，而在现代表示中并无变化。

3 乘云式，有

$$3x+6y+3z-3w^4$$

与物元式相消，有

$$3y+4z-3w^4+2w^3 \quad \text{中式}$$

也物易天位。

把云式按天元和人元的位置"斜截"，其上半为 $(2y-w^4)$，自之，即

$$(2y-w^4)^2=4y^2-4yw^4+w^8$$

其下半为 $(x+z)$，自之，即

$$(x+z)^2=x^2+2xz+z^2$$

二者相消，得

$$(2y-w^4)^2-(x+z)^2=-x^2-2xz-z^2+4y^2-4yw^4+w^8 \quad \text{戊式}$$

将戊式与三元式相消，再三乘之，得

$$15y^2-6xz-6z^2-12yw^4+3w^8 \quad \text{巳式}$$

倍丁式，有

$$-6x+10z+8w^3-6w^4$$

再乘以 z，与巳式相消，得

$$15y^2-12yw^4-16z^2-8zw^3+6zw^4+3w^8 \quad \text{下式}$$

"物易天位"。

又把中式剔分为二，其左半为 $3y$，自之为 $9y^2$。右半为 $4z+2w^3-3w^4$，自之为

---

① 此处，在相消时把 (3) 乘以 z，变成 $-24xz+40z^2-24zw^4+32zw^3$，即 (4) $-z\times$ (3).

$$(4z+2w^3-3w^4)^2=16z^2-24zw^4+16zw^3+9w^8-12w^7+4w^6$$

左半自之与右半自之相消，即

$$-9y^2+16z^2-24zw^4+16zw^3+9w^8-12w^7+4w^6 \qquad \text{庚式}$$

以-3乘下式，得

$$-45y^2+48z^2+36yw^4+24zw^3-18zw^4-9w^8 \qquad \text{上}$$

5乘庚式，有

$$-45y^2+80z^2+80zw^3-120zw^4+20w^6-60w^7+45w^8$$

与上相消，有

$$-36yw^4\text{①} +32z^2-102zw^4+56zw^3+54w^8-60w^7+20w^6 \tag{5}$$

12乘中式，有

$$36y+48z-36w^4+24w^3 \tag{6}$$

与前一式子相消，需把（6）式乘以w^4，与（5）相加，得

$$32z^2-54zw^4+56zw^3+18w^8-36w^7+20w^6$$

约去公因子2，有

$$16z^2-27zw^4+28zw^3+9w^8-18w^7+10w^6 \qquad \text{前式}$$

将其放在一边。

上式与下式相加，得

$$-9yw^4+6yw^3-92z^2+30zw^4-16zw^3+$$
$$3w^8+12w^4-6w^3-6w^2+18w \qquad \text{辛式}$$

倍中式有

$$6y+8z-6w^4+4w^3$$

与辛式相消，但要先乘以w^3，则有

$$-9yw^4-92z^2+30zw^4-24zw^3+3w^8+6w^7-$$
$$4w^6+12w^4-6w^3-6w^2+18w \tag{7}$$

又以-3乘中式，有

① “$-36yw^4$”原书误为“$-4yw^4$”，经验算，校正.

$$-9y-12z+9w^4-6w^3$$

乘以 w^4，与（7）相消，得

$$-92z^2+42zw^4-24zw^3-6w^8+12w^7-$$
$$4w^6+12w^4-6w^3-6w^2+18w$$

半之，有

$$-46z^2+21zw^4-12zw^3-3w^8+6w^7-$$
$$2w^6+6w^4-3w^3-3w^2+9w \quad 后式$$

用 8 乘之，得

$$-368z^2+168zw^4-96zw^3-24w^8+48w^7-$$
$$16w^6+48w^4-24w^3-24w^2+72w \quad (8)$$

用－23 乘前式，有

$$-368z^2+621zw^4-644zw^3-207w^8+$$
$$414w^7-230w^6 \quad (9)$$

（8）－（9），有

$$-453zw^4+548zw^3+183w^8-366w^7+$$
$$214w^6+48w^4-24w^3-24w^2+72w \quad 右式$$

4 乘右式，有

$$-1\ 812zw^4+2\ 192zw^3+732w^8-1\ 464w^7+$$
$$856w^6+192w^4-96w^3-96w^2+288w \quad (10)$$

137 乘前式，得

$$2\ 192z^2-3\ 699zw^4+3\ 836zw^3+$$
$$1\ 233w^8-2\ 466w^7+1\ 370w^6 \quad (11)$$

$w^2\times$（11），$\frac{z}{w}\times$（10），$\frac{z}{w}\times$（10）$-w^2\times$（11），得

$$-1\ 812z^2w^3+732zw^7+2\ 235zw^6-2\ 980zw^5+$$
$$192zw^3-96zw^2-96zw+288z-$$
$$1\ 233w^{10}+2\ 466w^9-1\ 370w^8 \quad 末式$$

4 乘末式，有

$$-7\,248z^2w^3+2\,928zw^7+8\,940zw^6-11\,920zw^5+$$
$$768zw^3-384zw^2-384zw+1\,152z-$$
$$4\,932w^{10}+9\,864w^9-5\,480w^8 \tag{12}$$

-453 乘前式，有

$$-7\,248z^2+12\,231zw^4-12\,684zw^3-$$
$$4\,077w^8+8\,154w^7-4\,530w^6 \tag{13}$$

$w^3\times$（13）与（12）相消，得

$$-9\,303zw^7+21\,624zw^6-11\,920zw^5+768zw^3-$$
$$384zw^2-384zw+1\,152z+4\,077w^{11}-$$
$$13\,086w^{10}+14\,394w^9-5\,480w^8 \qquad \text{左式}$$

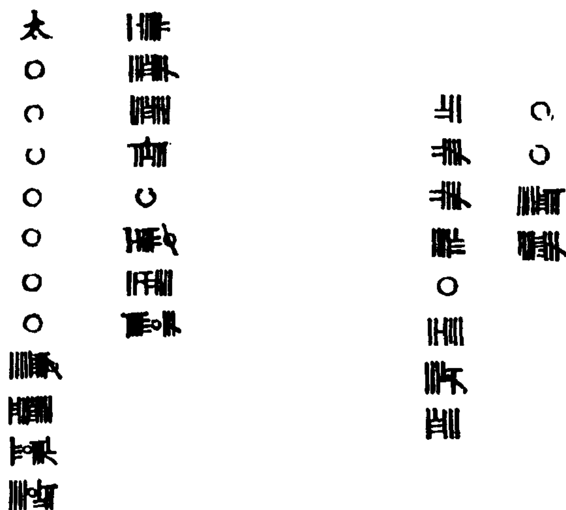


图 4.2.10

图 4.2.10 为原书左式、右式的原样。罗士琳说："左右对列，内二行相乘"，同类项合并，得

$$-1\,702\,449zw^{14}+7\,362\,090zw^{13}-12\,086\,586zw^{12}+$$

$$8\ 990\ 256\ zw^{11}-2\ 846\ 880zw^{10}+909\ 864zw^{9}-$$
$$633\ 240zw^{8}-633\ 528zw^{7}+1\ 376\ 064zw^{6}-$$
$$648\ 576zw^{5}-27\ 648zw^{4}+129\ 024zw^{3}-$$
$$46\ 080zw^{2}-55\ 296zw-82\ 944z \quad (14)$$

外二行相乘，同类项合并，得

$$-1\ 846\ 881zw^{14}+8\ 162\ 154zw^{13}-13\ 691\ 610zw^{12}+$$
$$10\ 370\ 352zw^{11}-3\ 003\ 040zw^{10} \quad (15)$$

(14) － (15)，即“内外相消”，得

$$144\ 432zw^{14}-800\ 064zw^{13}+1\ 605\ 024\ zw^{12}-$$
$$1\ 380\ 096zw^{11}+146\ 160zw^{10}+909\ 864zw^{9}-$$
$$632\ 240zw^{8}-633\ 528zw^{7}+1\ 376\ 064zw^{3}-$$
$$648\ 576zw^{5}-27\ 648zw^{4}+129\ 024zw^{3}-$$
$$46\ 080zw^{2}-55\ 296zw+82\ 944z=0$$

约去公因子 $72z$，就得到朱世杰的 14 次方程。

这是罗士琳给整本《四元玉鉴》所作细草中最长最麻烦的一题，其主导思想是先消去 x、y 项，最后得到如图 4.2.10 所示的那样，左右式都是剩下一列含 z 一次与 w 某次之积的项与一列只含 w 某次的项。为了达到这一目的，要经过多次变换，做法是把某式乘一具体数，使与另一式对应项系数绝对值相等，或乘某一未知数或其某次幂，使之能对应项相消，乘某次幂是使某项升（降）位与相消项的幂位相等，再对应相消。

罗士琳的做法是否符合朱世杰原意，前已指出，很难下这个结论，估计有一部分可能差不多。如果朱世杰大体上是这样建立他的方程（开方式）的话，即把多元方程化为一元方程要花费大量巨大的劳动。由于演算过程复杂，而且往往要回头利用前面的各个式子，传统的筹算已不满足需要，必须改用能保存全过程的方式，只有笔算才能做到这一点。朱世杰是否先用筹算算出，再用笔做记录？这样做十分麻烦，远不如直接用笔算。

在《四元玉鉴》中，又进一步发展了《算学启蒙》关于无理方程化为有理方程的问题。其特点是在已知条件中包括无理式，有一大批这样的方程，其中有的还包括两个无理式。例如“左右逢元”第21问，如下：

“今有勾弦相乘加勾股较，平方开之，与股适等。只云股弦相乘减弦和和，立方开之，与勾弦较同。问：勾弦各几何？答曰：勾三步，股四步。”

用a、b、c表示勾、股、弦，则本题两个已知条件为

$$\sqrt{ac+(b-a)}=b,$$

$$\sqrt[3]{bc-(c+b+a)}=c-a$$

朱世杰用二元术把问题转化为一个一元11次方程，求出勾的答案。

“术曰：立天元一为勾，地元一为股弦较。天地配合求之”，立即列出了相当于下面的方程

$$8x^{11}-60x^{10}+22x^9+671x^8-1\,932x^7+$$
$$2\,747x^6-2\,446x^5+1\,520x^4-620x^3+$$
$$110x^2+14x-6=0$$

可是朱世杰如何化去两个无理式，未透露一句话。罗士琳所补细草中，其系数仅隅和实相同，其余不同。

在《四元玉鉴》中，还包括一类不得整数开数的方程，整数之后带有分数，继续往下求时，朱世杰叫“之分法”。现举“和分索隐”第13问为例进行说明。

“今有直积自乘减和幂余一万一千七百五十一步一百四十四分步之八十三。只云较不及平四步一十二分步之七。问：长平各几何？答曰：平八步三分步之二，长一十二步四分步之三。”

本问是指一个长方形，给出二个条件，求其长和宽（平）。设a为平，b为长，则已知条件为：

$$(ab)^2-(a+b)^2=11\ 751\frac{83}{144}\text{步}$$

$$a-(b-a)=4\frac{7}{12}\text{步}$$

朱世杰分二步进行，第一步是

“术曰：立天元一为平，如积求之，得一百六十九万五千二百五十二为益实，三千九百六十为从方，一千七百二十九为从上廉，二千六百四十为益下廉，五百七十六为从隅，三乘方开之，不尽，按之分法求之”，给出了4次方程：

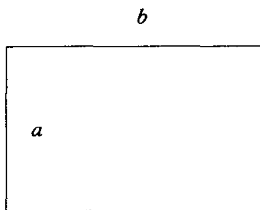


图 4.2.11

$$576x^4-2\ 640x^3+1\ 729x^2+3\ 960x-1\ 695\ 252=0$$

由此可求得正根的整数部分8，还有余式

$$576x'^4+15\ 792x'^3+159\ 553x'^2$$
$$+704\ 392x'-545\ 300=0$$ [①]

朱世杰没有给出这个余式，而是给出了下面的方程：

“得一百四万二千八十四亿五千二百八十一万二千八百为益实，二千三百三十七亿三十六万一百九十二为从方，九千一百九十万二千五百二十八为从廉，一万五千七百九十二为从下廉，一为正隅，三乘方开之，得三百八十四。与分母约之，合问。”

其现代形式为

$$y^4+15\ 792y^3+91\ 902\ 528y^2+233\ 700\ 360\ 192y$$
$$-104\ 208\ 452\ 812\ 800=0$$

解此方程，得 $y=384$，这是分数部分的分子，因此要“与分母约之”，由上面的过程知分母为576，于是 $x'=\frac{384}{576}=\frac{2}{3}$，$x=8\frac{2}{3}$步。

① 钱宝琮. 增乘开方法的历史发展. 宋元数学史论文集. 北京：科学出版社，1966. 36～59

朱世杰对方程的研究比较全面而系统，在解法上是前人的增乘开方法，已在《算学启蒙》中介绍过，因此《四元玉鉴》没有重述。按照他对开方式的叙述，方程的常数项不单独放在特殊位置，而是和其他项排在一起，相当于未知数为零次幂的项，即相当于全在方程的左端，右端为零。和现代方程的表示法完全一致。对方程的研究（列方程、转化方程和解方程等），朱世杰在中国历史上达到顶峰。

第三章　垛积与招差术

《四元玉鉴》的另一部分重要内容是有关垛积与招差问题，就其成果的水平来看达到了中国古代此类问题的高峰。

第一节　垛积及其逆问题

在《四元玉鉴》有 3 门 34 问属于垛积及相关问题，它们是“茭草形段” 7 问、“箭积交参” 7 问和 “果垛叠藏” 20 问。其他门也有涉及此类问题的。经按题研究的结果发现，没有一问是求积问题，大都是已知积（前 n 项和）反求末项或项数。在求解过程中使用了求和公式，而且全用天元术解算。因此，对这 34 问不能直接理解成是一般的垛积问题。

对于如何使用天元术解题不是本节的任务，主要是按书中的问题通过由天元术列出的方程，利用垛积求和公式解出末项。

本部分内容和方程一样，是《算学启蒙》相应内容的进一步推广和发展，下面按照垛积的由简到繁予以讨论。

朱世杰在造题时，往往在同一问中包括几类垛的问题，如“如意混合”门第 2 问包括 3 类，而包括 2 类的更多。因此，在以下的讨论中时常有一问多见的情况。又每一类垛都有特殊名称，有时同一类垛又有不同名称，这些都是需要注意的问题。

朱世杰的堆垛问题可分如下两大类：

一、三角形垛系列

茭草垛：已见于《算学启蒙》卷下“堆积还源”门第 1、8 问。

茭草垛是一个 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n\ (n+1)$ (1) 型的级数。

三角垛：见于“如意混合”门第 2 问，“茭草形段”门第 1 问（称为落一形垛），“果垛叠藏”门第 1 问（称为落一形垛），第 14～20 问。

例（“果垛叠藏”第 14 问）：“今有三角、四角垛果子各一所，共积一百一十一个。只云四角底面不及三角底面一个。问：二底面各几何？答曰：三角底面六个，四角底面一个。”

三角垛是

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+$$
$$(1+2+3+\cdots+n)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

或
$$1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \quad (2)$$

型级数。

四角垛：见于南宋杨辉的著作。

四角垛是

$$1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

型级数。

根据问题的已知条件，是已知三角垛与四角垛的总和为 S，前者的末项 n_1 与后者的末项 n_2 之差为 1，即 $n_1=n_2+1$。朱世杰用天元术求 n_1，有方程

$$n_1^3+n_1=222$$

解之，$n_1=6$。

撒星形垛：见于“茭草形段”门第 2 问，“如象招数”门第 2、3、5 问（称为落一形垛）。

例（“茭草形段”第 2 问）：“今天茭草一千八百二十束，欲令撒星形堆之。问：底子几何？答曰：一十三束。”

撒星形垛是

$$1+(1+3)+(1+3+6)+\cdots+\left[1+3+6+\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)\right]$$
$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3) \tag{3}$$

型级数。

根据已知条件，是由总和反求末项。即已知 $S=1\ 820$ 束，设项数为 x，由上面的公式有

$$1\ 820=\frac{1}{24}x\ (x+1)\ (x+2)\ (x+3)$$

将其变为如下的方程

$$x^4+6x^3+11x^2+6x-43\ 680=0$$

解之，得 $x=13$。

撒星更落一形垛：见于“茭草形段”门第 4 问，“如象招数”门第 5 问（称为“三角撒星形垛”）。

例（“茭草形段”第 4 问）：“今有茭草八千五百六十八束，欲令撒星更落一形堆之。问：底子几何？答曰：一十四束。”

撒星更落一形垛是

$$(1+2+3+\cdots+n)\times 1+\left[1+2+3+\cdots+(n-1)\right]\times(1+2)$$
$$+\cdots+1\times(1+2+3+\cdots+n)=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$\cdot(n+4) \tag{4}$$

型级数。

本问已知总和 $S=8\ 568$ 束，反求末项。设末项为 x，由上面的公式（4），有

$$8\ 568=\frac{1}{120}x\ (x+1)\ (x+2)\ (x+3)\ (x+4)$$ 将其变为如下的方程

$$x^5+10x^4+35x^3+50x^2+24x-1\ 028\ 160=0$$

解之，得 $x=14$。

三角撒星更落一形垛：见于“果垛叠藏”第 6 问。“今有三角

撒星更落一形果子，积九百二十四个。问：底子几何？答曰：七个。”

此种垛是

$$1\times(1+2+3+\cdots+n)+[1+(1+2)]\times[1+2+3+\cdots+(n-1)]+\cdots+[1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)]\times 1$$

$$=\frac{1}{720}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \qquad (5)$$

型级数。

本问已知总和 $S=924$，反求末项，设为 x，由上面的公式 (5)，有

$$924=\frac{1}{720}x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$$

将其改为如下的方程

$$x^6+15x^5+85x^4+225x^3+274x^2+120x-665\ 280=0$$

解之，得 $x=7$。

以上 5 问的 5 个方程中的后 3 个是直接由各级数求和公式反求而得，即把右端的分母乘到左端，再展开，就变成普通的方程形式。

公式 (1) ～ (5) 是一串关系密切的级数，后一级数的通项是前一级数的 n 项和。因此，它们可由一个一般性公式统一表示出来。因为 $2=2!$，$6=3!$，$24=4!$，$120=5!$，$720=6!$，所以可以设想对自然数 p 的阶乘有 $p!$。这样，就有

$$\sum\frac{1}{p!}n(n+1)(n+2)\cdots[n+(p-1)]$$

$$=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p) \qquad (6)$$

当 $p=1$，2，3，4，5 时，便分别得到公式 (1) 到 (5)。

如用 S_p 表示 (6) 的总和，由此得方程

$$S_p\times[(p+1)!]=x^p+q_1x^{p-1}+q_2x^{p-2}+\cdots+q_{p-2}x^2+[(p-1)!]x$$

二、一些特殊垛

《四元玉鉴》中除上面所讲的三角形垛系列外，还有一些特殊垛，它们很难归纳成某种系列，下面挑选一部分予以介绍。

岚峰形垛：见于“茭草形段”门第3问：“今有茭草三千三百六十七束，欲令岚峰形堆之。问：底子几何？答曰：一十二束。”

岚峰形垛是

$$1\times1+2\times(1+2)+3\times(1+2+3)+\cdots+n\times(1+2+3+\cdots+n)=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(3n+1)$$

型级数。

朱世杰用天元术求解：“立天元一为岚峰底子，如积求之，得八万八百八为益实，二为从方，九为从上廉，十为从下廉，三为从隅，三乘方开之，合问。”设x为底子（即末项），则有

$$3x^4+10x^3+9x^2+2x-80\ 808=0$$

解之，得$x=12$。

四角落一形垛：见于“果垛叠藏“门第3问。“今有四角落一形果子，积五百四十个。问：底子几何？答曰：八个。”

此垛是

$$1+(1+4)+(1+4+9)+\cdots+(1+4+9+\cdots+n^2)=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

型级数。

已知总和$S=540$，反求末项，设为x。用天元术，由上式有

$$x^4+4x^3+5x^2+2x-6\ 480=0$$

解之，得$x=8$。

四角岚峰形垛：见于“果垛叠藏”门第5问。“今有四角岚峰形果子，积四百四十八个。问：底子几何？答曰：五个。”

此垛是

$$1\times1+2\times(1+4)+3\times(1+4+9)+\cdots+n\times(1+4+9+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)\left[n\left(4n+1\frac{1}{2}\right)+\left(4n+\frac{1}{2}\right)\right]$$

型级数。

已知总和 $S=448$，反求末项，设为 x。用天元术，由上面的公式，有

$$4x^5+17\frac{1}{2}x^4+25x^3+12\frac{1}{2}x^2+x-26\,880=0$$

解之，得 $x=5$。

三角岚峰形垛：见于“果垛叠藏”门第4问。“今有三角岚峰形果子，积六百三十个。问：底子几何？答曰：六个。”

此垛是

$$1\times1+2\times(1+3)+3\times(1+3+6)+\cdots+n\left[1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)$$

型级数。

已知总和 $S=630$，反求末项，设为 x，用天元术，由上面的公式，有

$$4x^5+25x^4+50x^3+35x^2+6x-75\,600=0$$

解之，得 $x=5$。

奇层圆锥垛：见于“果垛叠藏”门第7问。“今有奇层圆锥垛果子，积九百三十二个。问：高几层？答曰：一十五层。”

此垛是

$$1+3+7+12+19+27+37+48+61+75+91+\cdots+m_{奇}$$

型级数。

已知奇数层之总和 $S=932$，反求层数，即项数 x。由天元术有

$$2x^3+3x^2+2x-7\,455=0$$

解之，得 $x=15$。

此级数有一很强的特点，即奇、偶二层（项）均构成等差数列：

奇数层：1，7，19，37，61，…

偶数层：3，12，27，48，75，…

前者的一阶差为 6，12，18，24，…，二阶差均为 6。后者的一阶差为 9，15，21，27，…，二阶差亦均为 6。都是二阶等差数列。朱世杰在造题时是否有意利用了这种情况，不得而知，他也没有交待。

在以上所讨论的问题中，朱世杰都未给出级数的求和公式，有些是前人研究过的，或他在《算学启蒙》中有过，如三角垛、四角垛等已经熟知。但大多数朱世杰仅给出名称，则必须根据他的开方式和后人的研究才能弄清楚是什么型的级数。本节所举出之级数求和公式，大都参考了前人的工作，李俨的研究[①]起了重要作用。

第二节　招　差　术

《四元玉鉴》卷中“如象招数”门共有 5 问，均属于招差问题。其中有 4 问为招兵事，一问为派民工事，都是每日依次增加同一数目，故而称为“招差”。此一词最早来自《授时历》，大约是王

---

① 李俨．中算家的级数论．《中算史论丛》第一集．北京：科学出版社，1954．315～438

恂取的。不过朱世杰不叫“招差”，而叫“招数”。

第一问：“今有官司差夫一千八百六十四人筑堤，只云初日差六十四人，次日转多七人，每人日支米三升，共支米四百三石九斗二升。问：筑堤几日？答曰：一十六日。”

本题是已知筑堤的总人数S_1，第一日出工64人，以后每日增加7人。又每人每日支米3升，已知支米总数为S_2。求筑堤所用日数。通过S_1或S_2及其他条件都能求出日数。例如用总人数，按其所给出的条件，则有级数

$$64+(64+7)+(64+2\times7)+\cdots+[64+(n\times7)]$$

$$=(n+1)\times64+\frac{1}{2}(n+1)n\times7$$

即 $$S_1=1\ 864=(n+1)\times64+\frac{1}{2}(n+1)n\times7$$

上式右端的$\frac{1}{2}n\ (n+1)$为茭草垛之和，设x为茭草底子，将上式右端展开、合并同类项，就有

$$3\ \frac{1}{2}x^2+67\ \frac{1}{2}x-1\ 800=0$$

解之，得$x=15$，加1① 为日数16。这个方程与朱世杰自己给出的完全一致，他说：“立天元一为茭草底子，如积求之，得一千八百为益实，六十七半为从方，三半为从隅，平方开之，得茭草底子一十五束，加一即日数。”

由于本问题为招差类，故可设$64=\Delta_1$，$7=\Delta_2$，$S_1=f\ (n)$，把上面的级数改成为

$$f\ (n)\ =n\Delta_1+\frac{1}{2!}n\ (n-1)\ \Delta_2$$

是为一个二阶招差公式。

---

① 加1是因为在合并同类项时，相当于两端各减64，实是去掉了第一天，故应加1. 以下各题与此类似.

如果从支米数考虑，就得到如下的公式

$$f(n)=(n+1)n\Delta_1+\frac{1}{3!}(n+1)n(n-1)\Delta_2$$

第三问："今有官司依圆箭束招兵，初束外周一十二只，次束外周转多六只，每人日给米四升，已招四千九百五人，支米九百三十一硕二斗。问：招来几日？答曰：一十五日。"

朱世杰所用圆箭公式相当于

$$S=1+G\ (1+2+3+\cdots+n)\ =1+\frac{(G+l)\ l}{12}$$

按本问，$G=6$，其中 $l=Gn=6n$，则上式变为

$$S=1+\frac{n\ (6+l)}{2}$$

而 6 和 l 相当于

$$6+12+18+\cdots+l$$

的首末项。

又按本问是一系列圆箭束，因此其招兵数用招差形式表达如下：

$$[1+G(1+2+3+\cdots+b)]+\{1+G[1+2+\cdots+(b+b)]\}+\cdots+\{1+G[1+2+3+\cdots+(b+n-1)]\}=n\Delta_1+\frac{1}{2!}n(n-1)\Delta_2+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta_3$$

朱世杰把此问归为三角垛，先用天元术通过下面的方程

$$x^3+12x^2+48x-4\ 849=0$$

求出三角底子（即末项）：$x=13$，再加 2，就得共招兵日数。

再以所用总米数来求，并用同样的表达方式，有

$$n[1+G(1+2+3+\cdots+b)]+(n-1)\{1+G[1+2+3+\cdots+(b+1)]\}+\cdots+1\times\{1+G[1+2+3+\cdots+(b+n-1)]\}=\frac{1}{2!}n(n+1)\Delta_1+\frac{1}{3!}(n+1)n(n-1)\Delta_2+\frac{1}{4!}(n+1)\cdot$$

$$n(n-1)(n-2)\Delta_3$$ [①]

朱世杰把此问归为三角落一垛，先用天元术通过下面的方程

$$x^4+18x^3+121x^2+328x-92\ 820=0$$

求出三角落一底子：$x=13$，加 2，得共招兵日数。

下面参考罗士琳细草，看看朱世杰可能是怎样得到三次四次方程的。

罗士琳的主导思想是从朱世杰自己在术中所说的“三角底子”和“三角落一底子”出发进行计算的。先讨论三次方程的建立。

设 x 为三角底子，加 2 得 $x+2$，为第一次实。以天元加 1 乘之，得 $(x+2)(x+1)=x^2+3x+2$，为第二次实。又以天元乘之，得 x^3+3x^2+2x，为第三次实。

又，第一个次束外周加 1，得 19，为上差。第一个次束外周 18，为中差。次束外周转多 6，为下差。

上二者对应相乘，再按三阶招差处理，于是有

$$19\times(x+2)=19x+38 \qquad 上$$

$$\frac{1}{2}\times 18\times(x^2+3x+2)=9x^2+27x+18 \qquad 中$$

$$\frac{1}{6}\times 6(x^3+3x^2+2x)=x^3+3x^2+2x \qquad 下$$

并上、中、下三位有

$$\begin{array}{r} 19x+38 \\ 9x^2+27x+18 \\ +)\ x^3+3x^2+\ 2x \\ \hline x^3+12x^2+48x+56 \end{array}$$

此结果与已招数 4 905 相等，于是有

① 参见李俨. 中算家的级数论.《中算史论丛》第一集. 北京：科学出版社，1954. 315～438

$$x^3+12x^2+48x-4\ 849=0$$

解之，得 $x=13$，加 2 为 15，即共招兵日数。

这是由已给总招兵数，反求共招兵日数。

再讨论四次方程的建立。

设 x 为三角落一底子，加 3 得 $x+3$，以天元加 2 乘之，即 $(x+3)(x+2)=x^2+5x+6$，为第一次实。又以天元加 1 乘之，即 $(x^2+5x+6)(x+1)=x^3+6x^2+11x+6$，为第二次实。又以天元乘之，得 $x^4+6x^3+11x^2+6x$，为第三次实。再以上、中、下差对应相乘，并仿上同样处理，

$$2\times19\times(x^2+5x+6)=38x^2+190x+228 \qquad 上$$

$$\frac{2}{3}\times18\times(x^3+6x^2+11x^2+6)=12x^3+72x^2+132x+72 \qquad 中$$

$$\frac{1}{6}\times6\times(x^4+6x^3+11x^2+6x)$$
$$=x^4+6x^3+11x^2+6x \qquad 下$$

并上、中、下三位，有

$$x^4+18x^3+121x^2+328x+300$$

与共支米数相等，把米数的单位改为升，则得上面 的 4 次方程。

罗士琳的理解给我们提供了学习的帮助。

第二和第四两问都是“平方招兵”，本质上是一样的，都是已知已招到人数，第二问已知支出钱数，第四问已知支出米数，都是求招兵日数。现将两问列下：

第二问：“今有官司依平方招兵，初段方面四尺，次日方面转多二尺，每人日给银一两二钱，已招兵四千九百五十六人，支银二万六千四十两。问：招来几日？答曰：一十四日。”

第四问：“今有官司依平方招兵，初段方面五尺，次段方面转多一尺，每人日给米三升，次日转多三升，已招二千四百四十人，支米四千四百七十七硕三斗二升。问：招来几日？答曰：一十五

日。”

后一题比前一题多“次日转多三升”这样一个条件。在不考虑这个条件时，它们的前一半相同。

所谓“平方招兵”是指正方形的各边同时增加一数，当然还是正方形，按此增加的方式招兵。设 a 为初段方面，即第一日正方形的一边，次日每边增加 b，以后均依此增加，并用招差形式表示，则有

$$a^2+(a+1\times b)^2+(a+2\times b)^2+\cdots+[a+(n-1)\times b]^2$$
$$=n\Delta_1+\frac{1}{2!}n(n-1)\Delta_2+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta_3$$

这是招兵总数。朱世杰用相当于下面的方程

$$a_1x^3+a_2x^2+a_3x-a_4=0$$

求出三角底子 x，加 2，即招兵日数。

通过支银数求招兵日数。支银数的招差公式为

$$na^2+(n-1)(a+1\times b)^2+(n-2)(a+2\times b)^2+\cdots$$
$$\cdots+1\times[a+(n-1)\times b]^2=\frac{1}{2!}n(n+1)\Delta_1+$$
$$\frac{1}{3!}(n-1)n(n+1)\Delta_2+\frac{1}{4!}(n+1)n(n-1)(n-2)\Delta_3$$

朱世杰用下面的方程

$$x^4+16x^3+95x^2+236x-64\,895=0$$

求出 $x=12$，加 2，即所求招兵日数。

通过米数求招兵日数。因为多了条件“次日转多三升”，故与前表达式有所不同

$$a^2+[a^2+(a+1\times b)^2]\times 2+[a^2+(a+1\times b)^2+(a+2\times b)^2]\times 3+\cdots+\{a^2+(a+1\times b)^2+(a+2\times b)^2+\cdots+[a+(n-1)\times b]^2\}\times n$$
$$=\frac{1}{3!}n(n+1)(2n+1)\Delta_1+\frac{1}{4!}(n-1)n(n+1)(3n+2)\Delta_2$$

$$+\frac{1}{5!}(n-2)(n-1)n(n+1)(4n+3)\Delta_3$$ ①

朱世杰用下面的方程

$$24x^5+705x^4+7\,950x^3+36\,735x^2+73\,386x-53\,674\,920=0$$

求出 $x=13$，加 2，即招兵日数。

第五问："今有官司依立方招兵，初招方面三尺，次招方面转多一尺，每人日支钱二百五十文，已招二万三千四百人，支钱二万三千四百六十二贯。问：招来几日？答曰：一十五日。"

本问是全书中的重要问题之一，它在术文之后，有朱世杰给出的非常珍贵的一段自注，很有助于理解全部这 5 个问题。

所谓"立方招兵"是指在一立方的每一边增加一数，仍成立方，按此方式逐日招兵。

朱世杰为了解决问题，在自注的开始首先提出了反问：

"或问还原，依立方招兵，初招方面三尺，次招方面转多一尺，得数为兵。今招一十五方，每人日支钱二百五十文。问：招兵及支钱各几何？答曰：兵二万三千四百人，钱二万三千四百六十二贯。"

接着朱世杰给出了"四差"，即"上差二十七，二差三十七，三差二十四，下差六"。此由已知条件求得：

日次	上　差	二差	三差	下差
初日	$a^3=3^3=27$，			
		37		
次日	$(a+1\times b)^3=(3+1)^3=64$，		24	
		61		6
三日	$(a+2\times b)^3=(3+2)^3=125$，		30	

① 以上几个招差公式，参见李俨．中算家的级数论．《中算史论丛》第一集．北京：科学出版社，1954．315～438

		91		6
四日	$(a+3\times b)^3=(3+3)^3=216$，		36	
		127		6
五日	$(a+4\times b)^3=(3+4)^3=343$，		42	
		169		…
六日	$(a+5\times b)^3=(3+5)^3=512$，		…	
		…		
……	……			

左上斜列的 27、37、24 和 6 就是“四差”。

求兵数时，朱世杰给出了“四积”，然后又与“四差”对应相乘求和，他在自注中说：

“求兵者，今招为上积；又今招减一为茭草底子积为二积；又今招减二为三角底子积为三积；又今招减三为三角落一（底子）积为下积。以各差乘各积，四位并之，即招兵数也。”

把“四差”分别用 Δ_1、Δ_2、Δ_3、Δ_4 表示，则上引文，设 n 为今招，于是有

$n\Delta_1$　　上积乘上差

$\frac{1}{2!}n\ (n-1)\ \Delta_2$　　二积乘二差

$\frac{1}{3!}n\ (n-1)\ (n-2)\ \Delta_3$　　三积乘三差

$\frac{1}{4!}n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ \Delta_4$　　下积乘下差

再把各日招兵数加起来，就得

$$a^3+(a+1\times b)^3+(a+2\times b)^3+\cdots+[a+(n-1)\times b]^3$$

$$=n\Delta_1+\frac{1}{2!}n(n-1)\Delta_2+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta_3+$$

$$\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta_4$$

如果把左端用 $f(n)$ 表示，就有

$$f(n)=n\Delta_1+\frac{1}{2!}n(n-1)\Delta_2+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta_3+\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta_4$$

这就是一个四阶招差公式。

朱世杰在正文中，通过四次方程求日数。设天元一（x）为三角落一底子，则

$$x^4+22x^3+181x^2+660x-92\ 736=0$$

解之，得 $x=12$，加 3，即为所求。

朱世杰又以同样方式，求钱数。

“求支钱者，以今招为茭草积为上积；又今招减一为三角底子积为二积；又今招减二为三角落一积为三积；又今招减三为三角撒星积为下积。以各差乘各积，四位并之。所得又以每日支钱乘之，即得支钱之数也。”

与上式类似地，有

$$\begin{aligned}&na^3+(n-1)(a+1\times b)^3+(n-2)(a+2\times b)^3+\cdots\\&+1\times[a+(n-1)\times b]^3\\&=\frac{1}{2!}(n+1)n\Delta_1+\frac{1}{3!}(n+1)n(n-1)\Delta_2+\\&\frac{1}{4!}(n+1)n(n-1)(n-2)\Delta_3+\\&\frac{1}{5!}(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta_4\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}f(n)=&\frac{1}{2!}(n+1)n\Delta_1+\frac{1}{3!}(n+1)n(n-1)\Delta_2+\\&\frac{1}{4!}(n+1)n(n-1)(n-2)\Delta_3+\\&\frac{1}{5!}(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta_4\end{aligned}$$

这也是一个四阶招差公式。

朱世杰在正文中，通过天元术以一个五次方程，求日数。

“立天元一为三角撒星底子，如积求之，得五百六十一万八百四十为益实，一万八千三百六十二为从方，六千三百九十为从上廉，一千七十五为从二廉，九十为从三廉，三为正隅，四乘方开之，得三角撒星底子一十二个，加三即日数。”
由此有

$$3x^5+90x^4+1\ 075x^3+6\ 390x^2+18\ 362x-5\ 610\ 840=0$$

解之，得 $x=12$，加 3，即所求之日数。

朱世杰的这两个方程的建立，无疑应和以前情况一样，我们已经根据罗士琳所补细草讲过。基本思路是：由级数求和公式反求项数。求和公式的右端有几个 n 相乘，方程就是几次，如上通过兵数的招差公式右端有 4 个 n 相乘，所得方程就是四次，等等。

在招差这 5 个问题中，朱世杰没有直接给出一个招差公式。但是在第五问的自注中明确给出了最重要的两个，这就证明了其余几个公式的形成同样应是如此。

招差公式与插值法公式是等价的，因此可以说朱世杰已把插值法推广到了四次等间距的情形，是一项有价值的成果。

第三节 垛积招差与“古法七乘方图”的关系

垛积招差与“古法七乘方图”之间的关系问题，朱世杰并没有进行讨论。他是否未注意到呢？这不太可能。因为两者的关系是显而易见的，特别是三角垛系列尤为清楚。事实上，由“古法七乘方图”可以构造出大批级数，其中的一部分就是三角垛系列。

对“古法七乘方图”不能理解为只是到七乘（8 次），而是图上为七乘，朱世杰肯定知道可以任意往下造，需要多少乘就造到多少乘。

为了方便起见，把“古法七乘方图”改为现代形式（图4.3.1）。朱世杰在图上画有斜线，把数字都按系列连起来，与贾宪的“开方作法本源”图不同。由此可以推知，朱世杰是有想法的。

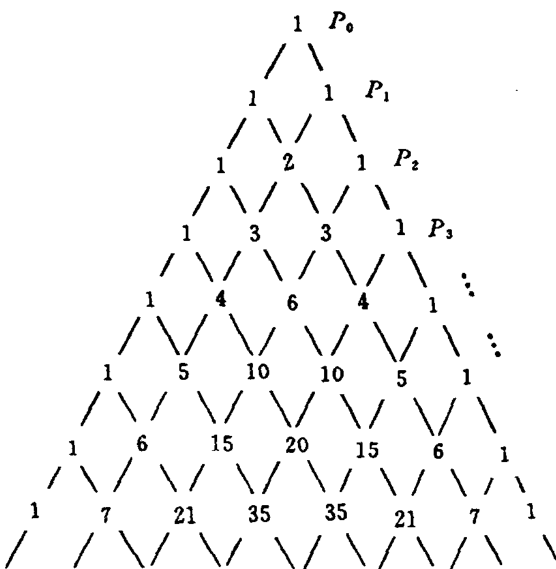


图 4.3.1

在图4.3.1中的每条斜线所连起来的一串数都构成一个级数。比如考虑向左侧的斜线，第一条所连的数都是1，第二条所连的数为1、2、3…，第三条所列的数为1、3、6…，等等。从第一列开始依次用P_0、P_1、P_2…表示。它们每列都构成等差数列，即

如称0阶

P_0：1，1，1，…1

1阶

P_1：1，2，3，……，n

2阶

P_2：1，3，6，……，$\frac{1}{2!}n(n+1)$

3阶

P_3：1，4，10，……，$\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$

……

P_{n-1}：1，n，$\frac{1}{2!}n(n+1)$，$\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$，…，

$\{\frac{1}{(n-1)!}n(n+1)(n+2)\cdots[n+(n-2)]\}$　$n-1$阶

这里$n\geqslant 1$，规定$0!=1$。

由上面的数列，可得如下一批级数

$$\sum_{1}^{n} 1=n$$

$$\sum_{1}^{n} n=\frac{1}{2!}n(n+1)$$

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{2!}n(n+1)=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$$

……

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{p!}n(n+1)(n+2)\cdots[n+(p-1)]$$
$$=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)$$

这就是本章第一节所给出的一批三角形垛系列级数。

本系列级数均来自“古法七乘方图”的每一斜行数字之和，它们的一般形式又可改写为如下的样子：

$$\sum_{r=1}^{n}\binom{r+p-1}{p}=\binom{n+p}{p+1}$$ [1]

建议把此式叫“朱世杰恒等式”[2]。

清代李善兰（1811～1882）对垛积的研究无疑是在朱世杰工作的基础上展开的，并取得了大批进一步成果[3]。我们必须注意到：他们的研究都与“古法七乘方图”[4] 分不开，李善兰在他的《垛积比类》一书中有多幅图形系由该图演变来的。

上列的垛积公式与招差公式间的关系是显而易见的。只要把

① 钱宝琮．朱世杰垛积术广义．《学艺》第四卷第七号（1923）．1～9

② 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社．1984．213

③ 罗见今．《垛积比类》内容分析．《内蒙古师院学报》（自然科学版），1982（1）：89～105

④ 为了叙述方便采用这个既有名称．

垛积公式稍微做些修改，再乘上相应的差（Δ），就得到招差公式。实际上在第二节已多次遇到，朱世杰在“立方招兵”问的注中则明确讲过。现在再重新整理，并改写如下：

$$f(n)=(\sum_{1}^{n}1)\Delta_1$$

$$f(n)=(\sum_{1}^{n}1)\Delta_1+(\sum_{1}^{n}n)\Delta_2$$

$$f(n)=(\sum_{1}^{n}1)\Delta_1+(\sum_{1}^{n}n)\Delta_2+[\sum_{1}^{n}\frac{1}{2!}n(n-1)]\Delta_3$$

$$f(n)=(\sum_{1}^{n}1)\Delta_1+(\sum_{1}^{n}n)\Delta_2+[\sum_{1}^{n}\frac{1}{2!}n(n-1)]\Delta_3+[\sum_{1}^{n}\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)]\Delta_4$$

这就是由一阶到四阶招差公式。它们的一般形式是

$$f(n)=(\sum_{1}^{n}1)\Delta_1+(\sum_{1}^{n}n)\Delta_2+\cdots+\{\sum_{1}^{n}\frac{1}{p!}n(n-1)(n-2)\cdots[n-(p-1)]\}\Delta_{p+1}$$

按照这种理解，朱世杰可以给出任何阶的招差公式，就看是否需要了。他造了“平方招兵”、“立方招兵”等问题，用到了三阶和四阶招差公式，假若造了“三乘方招兵”便要用到五阶招差公式，等等。

朱世杰是中国历史上最杰出的数学家之一，他的成就已得到国际公认，不过他的工作被埋没了500多年才重见天日。清代很多人研究《算学启蒙》和《四元玉鉴》两书，给《四元玉鉴》做细草的就有罗士琳、沈钦裴、陈棠、戴煦等多人，民国初年还有

董化时的工作。随着三上义夫的英文著作的出版[①]，使西方人对朱世杰数学研究有所了解，萨顿在其著作中有朱世杰（Chu Shih-Chieh）一小节，并给出了很高的评价，他说：朱世杰“中国数学家，是他的民族，他的时代，并且是所有时代的杰出的最伟大的数学家之一”[②]。旅居新西兰的学者谢元作（John Hoe）对《四元玉鉴》进行过深入研究，并用法文出版了一部专著[③]。1971 年，美国出版的科学家传记辞典也有朱世杰条[④]，并给予了很高评价。国内对朱世杰的研究，20 世纪初有钱宝琮对垛积术的研究[⑤]和郑之蕃对四元术的研究[⑥]，20 世纪 60 年代有杜石然的工作[⑦]。但迄今尚无一本有关朱世杰的全面研究的专著出版。20 世纪 90 年代，在《刘徽评传》中以合传的形式将“朱世杰评传”列下其中（孔国平执笔）[⑧]。

总之，朱世杰已是世界公认的中国古代数学家了。

---

① Mikami, Y.. The Development of Mathematics in China and Japan. Leipezig: 1913.

② G. Sarton. Introduction to the History of Science I. Washington: 1927. 701

③ John Hoe. les systemes d'equations polynômes dans le Siyuan Jujian (1303), Paris: Memoires de L'institut des Hautes Études Chinoises. 1977

④ Ho Peng-Yoke. Chu Shih-Chih, Dictionary of Scientific Biography Ⅱ. New York: 1971. 265～271

⑤ 钱宝琮. 朱世杰垛积广义.《学艺》，1921，4 (7)：1～9

⑥ 郑之蕃. 四元开方释要. 清华学报，1924，1 (2)：233～278

⑦ 杜石然. 朱世杰的“四元消法”和“垛积招差”.《科学史集刊》第四集. 1962. 66～80

⑧ 周瀚光，孔国平. 刘徽评传. 南京：南京大学出版社，1994. 277～324

第　五　编

元代后期与明代前期对传统数学的整理与著述

元代后期，大约从1330年前后起，数学研究逐渐发生变化，主导思想是普及和大众化。本编分为三大部分，第一部分是沙克什（赡思）和赵友钦的非数学著作中的数学内容；第二部分是由元末到明初的几部数学著作，同时也包括《永乐大典》所收数学书籍的介绍；第三部分主要讲述吴敬及其著作《九章算法比类大全》。

第一章　赵友钦对圆周率的研究与沙克什水利工程中对数学的应用

本章讲述赵友钦在研究天文问题时进而去研究圆周率值的近似值；讲述沙克什在水利工程中用到了许多数学知识，其中包括天元术。实际上是数学在天文学和水利学两方面的应用。

第一节　赵友钦对圆周率的研究

赵友钦，又名敬，字子恭（或子公），一说字敬夫，自号缘督，人称缘督先生或缘督子。鄱阳人（今江西波阳），又说德兴人（今

江西德兴)。赵友钦为宋室汉王第12世孙，他一生不愿露面而隐遁自晦，“习天官遁甲钤式诸书，欲以事功自奋。”[①]他曾在江西德兴居留，后移往浙江龙游（今浙江龙游县)，在龙游东鸡鸣山麓定居并从事学术研究。在龙游山遇扶风云游道士石得之，石得之乃“世传杏林仙人”[②]，两人谈玄论道颇为投机，别时石得之以《九还七返丹书》遗之，赵友钦“自是视世事若漠然”[③]。后又往东海上独居数十年，注释《周易》达万言。他常骑一青骡，携一书童来往于衡婺山水之间。时人很少了解他的思想和行为，“唯傅文懿公立极独畏敬之，以为发前人所未言”[④]。他的弟子朱晖是龙游人，他的赘婿范铨是北宋名臣范仲淹之后。赵友钦死后，葬于龙游鸡鸣山。

关于赵友钦的生卒年代自明代起就有种种说法，清初龙游人范一粱有《赵缘督年世考》专论此事，仅录于此：

尝读志而至宋濂《革象新书》序，有云：惟傅文懿公立独敬畏之，谓其书实发前人所未言。则知缘督赵公者，宋人也。或曰生于元，则大谬不然者。《元史》有云：访求通皇极数祝泌子孙，其甥傅玄来上其书。考是年为元世祖至元十六年，实接宋统之初年也。而序云“立敬畏乎公”。固未知立与公曾见与否？或止读其书而叹服之？均无考。然据序而在游婺衢之先，则其年齿必长乎立可知矣。是立且生于宋季，公岂非生于宋时者乎？虽志又载公与宋濂、刘基相为往来之文，序又云“有朱晖德明者，龙游人也。尝以之游，得其星历之学。晖既没，其徒同里章濬因获受是书，而来徵濂为之序”。则晖已先于濂，而公更先于濂。可知濂既非公同

① 宋濂.《革象新书》序.

② 宋濂.《革象新书》序.

③ 宋濂.《革象新书》序

④ 宋濂.《革象新书》序.

时，基可无论矣。乃前后各志并星术著书，引载公言事而俱记公于元。夫岂无志哉。大抵因《革象新书》中有“泰定甲子”之文。夫“泰定甲子”，国初毛凤飞已疑之矣。其评《六周岁终》篇有云“陈氏引用《革象新书》在大德乙巳。考元成宗大德下距泰定几二十年，当大德间《革象新书》业既盛行海宇。而今本《元会运世》篇内有‘泰定甲子’之文，或出王待制祎增添，或出章司玄濬参补，皆不可知”云云。则知是书非公原本也。故杂以元时事，而世即指公为元人，亦考核之未尝矣。则欲定公之年世，当以宋濂之序为正据。或曰公生于宋季，书传于元初颇近之矣。康熙五十一年十一月。

范一梁之论遂概括成“宋末元初”说，但这一结论失于宽泛。新近从有关道教文献中发现的史料为辨明这一问题提供了重要线索。①

考元陈致虚《金丹大要》内云：黄房公得丹阳之道，授之太虚真人李珏紫琼真人张模，模授之缘督真人赵友钦。友钦于乙巳秋寓衡阳，以金丹妙道授上阳子。又明王世桢《列仙全传》道：乙巳之秋，[赵友钦] 寓衡阳，以金丹妙道授上阳子陈观吾。

“上阳子”即陈致虚之号，“观吾”为其字。这里清楚地记录了陈致虚于1329年（己巳，元明宗天历二年）拜师于赵友钦。再有陈致虚《上阳子金丹大要仙派》内载：

谨拜请

祖师黄房公披云宋真人

太虚李真人

度师缘督赵真人

古往今来修真学仙、得道

① 徐义保. 赵友钦生活年代与籍贯考. 载李迪主编. 通向现代科学之路的探索. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，1993.

紫琼张真人

度师谷云刘真人

一切对贤恭望仙慈降临醮座

以这段文字来看，赵友钦已过世。因陈致虚《金丹大要》成书于1335年，故可推断赵友钦在1329～1335年之间去世。

赵友钦著述颇丰，据载有《金丹正理》、《盟天录》、《缘督子仙佛同源论》、《三教一源》、《推步立成》、《革象新书》等。上述书目中，《推步立成》为天文学的书，其他多为道教方面的书，可能涉及一些化学知识，但除《革象新书》外，均已失传。

原本《革象新书》共5卷32篇，主要讨论天文学问题，也涉及数学和光学。书中称“岁策加减法自至元辛巳行之至今”，可知其写成于1281年之后。赵氏生前将此书授予弟子朱晖，后者又续传给同里门人章濬，章氏恐此书年久泯灭，遂请金华学者宋濂作序并自加整理刊行。明代王祎认为读此书可以看出赵友钦“长于律法算数，而天官星家之术尤精”[①]，又认为“然其为言涉于芜冗鄙陋，反若昧其旨意之所在”[②]，故“削其支离，证其讹舛，厘其次等，挈其要领”[③]，将其编为2卷，自后元刊本反鲜为人知。清代乾隆年间四库馆臣从《永乐大典》中录出原本《革象新书》，两相比照，认为王祎删改本“其所润色者颇多，刊除者亦复不少，然于改定之处不加论辨，使观者莫能寻其增损之迹以救其得失之由。又其中舛谬之处亦未能芟除净尽，特其字句之芜累，一经修饰，斐然可观。抑变善于点窜者矣。平心而论，原本词虽稍沓，而详赡可考，改本文虽颇略而简径易明，各有所长，未容偏废。”[④] 故一

① 王祎.《革象新书》原序.

② 王祎.《革象新书》原序.

③ 王祎.《革象新书》原序.

④《四库全书》“重修革象新书提要”.

道收入《四库全书》。

《革象新书》目次为："天道左旋"、"日至之景"、"岁序终始"、"闰定四时"、"天周岁终"、"历法改革"、"星分棋布"、"日道岁差"、"黄道损益"（以上为卷一）、"积年日法"、"元会运世"、"气朔没灭"、"日月盈缩"、"月有九行"、"时分百刻"、"昼夜短长"、"气积寒暑"、"天地正中"、"地域远近"（以上为卷二）、"月体半明"、"日月薄食"、"目轮分视"、"五纬距合"（以上为卷三）、"盖天舛理"、"浑仪制度"、"经星定躔"、"横度去极"、"占景知交"、"偏远准则"（以上为卷四）、"小罅光景"、"勾股测天"、"乾象周髀"（以上为卷五）。王祎删改本卷末还提到"天文图"。由上述目录可知，赵友钦的意图在于对中国古代天文学的理论及方法给出一个较系统的介绍。

赵友钦在书中用浅显生动的形象比喻说明天文问题。正是透过通俗的语言，表露出赵友钦在天文学、光学和数学方面均有很深的造诣。具"日月薄食"篇明确肯定日道远，月道近（"日道距天较近，月道距天较远"），进而在中国首先提出了"日之圆体大，月之圆体小"的正确论断；在"偏远准则"篇中设计了测定两颗恒星的上中天的"恒星时"时刻差来求它们之间的赤经差的新方法[①]；其"元会运世"篇批驳了邵雍在《皇极经世书》中提出的宇宙循环论；"小罅光影"篇中进行了大规模的实验，研究了光线直进，针孔成像与照度问题。赵友钦通过实验已经得到：照度随光源的强度增加而增加，随距离的增加而减少。这一结论，在国外400年后德国科学家兰倍特（J. Lambert，1728～1777）才得出照度跟距离平方成反比的定律[②]；在数学方面于"乾象周髀"

① 薄树人．中国古代的恒星观察．《科学史集刊》(3)．北京：科学出版社，1960

② 王锦光．赵友钦及其光学研究．《科技史文集》(12)．上海：上海科学技术出版社，1984

中针对《授时历》使用圆周率的简陋，通过从圆内接四边形开始逐渐倍增，使圆内接正多边形逼近圆周，证明了$\pi=\frac{355}{113}$比$\pi=3$、$\frac{22}{7}$、$\frac{157}{50}$精密。

更为重要的是，《革象新书》表现出赵友钦十分注重从客观实际出发探索自然规律，他既重视实验，又重视理论探索。他的比较实验方法优于世纪著名的阿拉伯科学家伊本·海赛木（Ibn al-Haitham，965～1039）[①]，他所倡导的实验方法也比F·培根（Francis Bacon，1561～1626）早3个世纪。

圆周率的推算是中国古代数学史的辉煌一页。《九章算术》、《周髀算经》都取圆周率为“径一周三”，东汉刘歆、张衡意欲更设新率，但“未臻折衷”。三国时刘徽创始用割圆术计算圆周率，开创了中国数学史圆周率研究的新纪元。刘徽从圆内接正六边形起算，算得圆内接正192边形时，获得$\pi=3.14$，或$\pi=\frac{157}{50}$；算得圆内接正3 072边形时，$\pi=3.1416$或$\pi=\frac{3927}{1250}$；南北朝时祖冲之则进一步求出：

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

并给出

密率：$\frac{355}{113}=3.1415929$

约率：$\frac{22}{7}=3.142$，

但是，元《授时历》在计算中仍用$\pi=3$，故使得太阳的赤经赤纬误差很大。《革象新书》第五卷“乾象周髀”篇关于圆周率的

① 徐启平．伊本·海赛木的光学及其与宋元光学之比较．《科学史论集》．合肥：中国科技大学出版社，1987．

研究与讨论，或许正是为了驳正《授时历》这一缺点的。

赵友钦从周天直径的计算开始他的讨论。他叙述了历代各家所取用的圆周率，如$\pi=3$、$\frac{157}{50}$、$\frac{22}{7}$、$\frac{355}{113}$等。他认为“圆径一尺而周围三尺，则三尺尚有余；围三尺而中径一尺为不足，盖围三尺径一尺是六角之田也”①。“径一尺而周三尺一寸四分犹自径多围少，径七尺而周二十二尺却是径少围多。径一百一十三而周围三百五十五最为精密。今求日周天径是此法也。”

赵友钦先绘“方圆相切”图：

画为百眼棋盘，一眼广一寸；横十寸名勾，在于东西相距。方图之内画为圆图，是去其方之四角也。圆径十寸与外方之股数相同。圆径名髀，比方之股其数同而字义不异，但有方圆之别。就圆图之内又画小方图，其小方四角不指外方四角，而斜抵东西南北之四正，盖其外大方四角在于乾坤艮巽，其内小四角在于坎离震兑。

据上所述绘图如5.1.1。

接着赵友钦论述其“以方求圆”的算法原理：

自四角之方添为八角曲圆，为第一次；若第二次则求其为曲十六，若第三次则求其为曲三十二，若第四次则求其为曲六十四；凡多一次其曲必倍，若至十二次，则其为曲一万六千三百八十四，其初之小方渐加、渐展、渐满、渐实。角数愈多，而其为方者不复为方，而变为圆矣。

然后“以第一次言之”给出具体算法。兹引述于此，并辅之以现代符号分出层次：

(a) 内方之弦十寸名大弦(C)，自乘得一百寸名大弦幂(C^2)；

① 以下引文皆引自赵友钦《革象新书》，王祎删改本《重修革象新书》并载详细算法.

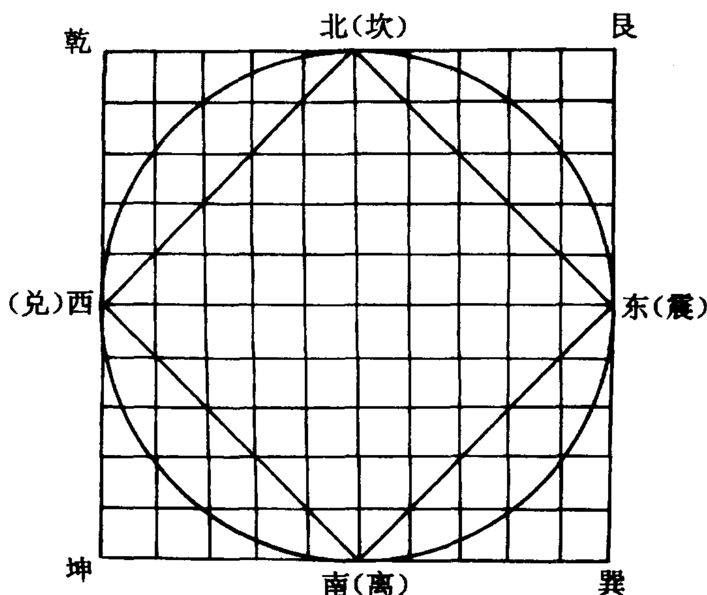


图 5.1.1　“以方求圆”

(b) 内方之勾幂五十寸名第一次大勾幂 (A_1^2)；

(c) 以第一次大勾幂减其大弦幂，余五十寸名第一次大股幂 (B_1^2)，开方得七寸七厘一毫有奇，名第一次大股 (B_1)；

(d) 以第一次大股减其大弦，其二寸九分二厘八毫有奇，名第一较 ($d_1=C-B_1$)；

(e) 以此较折半得一寸四分六厘四毫有奇，名第一次小勾 ($h_1=d_1/2$)，此小勾之数乃是内方之四边与圆围最相远处也；

(f) 以第一次小勾自乘，得二寸一分四厘四毫有奇，名第一次小勾幂 ($a_1^2=h_1^2$)；

(g) 以第一次大勾幂折半得二十五寸，又折半得一十二寸五分，名第一次小股幂 ($b_1^2=A_1^2/4$)；

(h) 以第一次小股幂并第一次小勾幂，得一十四寸六分四厘四毫有奇，名第一次小弦幂 ($c_8^2=a_1^2+b_1^2$)；

(i) 以第一次小弦幂开方，得三寸八分二厘六毫有奇，名第一次小弦 (c_8)，即是八曲之一；

(j) 八乘其第一次小弦得三十寸六分一厘有奇，是八曲之周围也 ($p_8=8\cdot c_8$)。

如图 5.1.2 所示，若求圆内接正八边形一边 (CD) 之长，有：

$$CD=\sqrt{CE^2+DE^2}=\sqrt{\left(\frac{CF-EN}{2}\right)^2+DE^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{c-b_1}{2}\right)^2+\left(\frac{a_1}{2}\right)^2} \quad (1)$$

式中，C 为大弦 (10 寸)，$A_1=B_1$ 二内接正四边形一边之长，以术求出：

CD (c_8) $=3.826\cdots\cdots$ 有奇 (寸)

八曲之周 $p_8=2^3\cdot c_8=30.61\cdots\cdots$ 有奇 (寸)

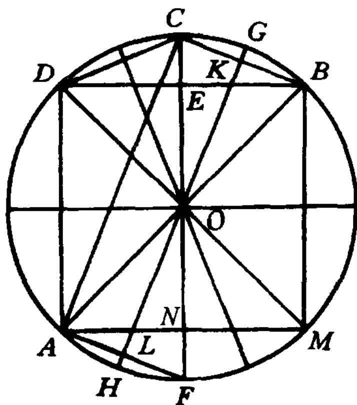


图 5.1.2

为避免求至 12 次时，“数之降者渐小愈小则不便于数名”，赵氏使大弦为 1000 寸。然后给出由 c_8 求 c_{16}的迭代算法：

求至第二次者，以第一次小弦幂 (c_8^2) 就名第二次大勾幂，以第 (一) [二] 次大 (股) [勾] 幂①，减其大弦幂 (1000^2)，

① ( ) 内为讹误文字，当删；[ ] 内为校补文字. 下同.

余为第二次大股幂，开方为第二次大股$\left(\sqrt{(1000)^2-(c_8)^2}\right)$，以减其大弦，余为第二较，折半名［第］二次小勾$\left(\frac{1000-\sqrt{(1000)^2-(c_8)^2}}{2}\right)$，此小勾之数是八曲之边与圆最相远处也。以第二次小勾自乘名第二次小勾幂，以第二次大勾幂两折，名第二次小股幂$(c_8/2)^2$，并第二次小勾幂名第二次小弦幂，开方为第二次小弦即是十六曲之一，以十六乘其第［二］小弦，即是十六曲之圆周也。

以现代符号表之，即有

$$c_{16}=\sqrt{\left(\frac{1000-\sqrt{(1000)^2-(c_8)^2}}{2}\right)^2+\left(\frac{c_8}{2}\right)^2}=195.09$$

……有奇　(2)

$$p_{16}=2^{2+2}\cdot c_{16}=3\ 121.44\cdots\cdots\text{有奇}$$

公式（2）的正确性可由图 5.1.2　获证：

$$\begin{aligned}c_{16}=CG&=\sqrt{GK^2+CK^2}=\sqrt{\left(\frac{HG-LK}{2}\right)^2+CK^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{HG-AC}{2}\right)^2+CK^2}\\&=\sqrt{\left(\frac{1000-\sqrt{(1000)^2-(c_8)^2}}{2}\right)+\left(\frac{c_8}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

赵友钦认为：

以第二次仿第一次，若至十二次，递次相仿而已……

这里明确给出了“递次相求”的一般迭代公式：

$$c_{2^{n+2}}=\sqrt{\left(\frac{2R-\sqrt{(2R)^2-(c_{2^{n+1}})^2}}{2}\right)^2+\left(\frac{c_{2^{n+1}}}{2}\right)^2},\quad(3)$$

式中 $n=2, 3, \cdots, 12$；赵友钦算到内接正 $2^{12+2}=16\ 384$ 边形，指出：

置第十二次之小弦，以第十二次之曲数一万六千三百八十四乘之，得三千一百四十一寸五分九厘二毫有奇，即是千寸径之周围也。置此周围之数降呼作三尺一寸四分一厘五毫九丝二忽有奇，以一百一十三乘之，果得三百五十五尺，故言其法精密。

赵氏只给出他计算到正 16 384 边形以验证祖冲之的密率 355/113 是一个精密的近似值，而略去了他的推求过程（甚至未给出 c_{12}），今依公式，补充计算，列于下表（5.1.1）：

表 5.1.1

n	2^{n+2}	$c_{2^{n+2}}$	$\pi_n=p_n/1000=2^{n+2}\cdot c_{2^{n+2}}/1000$
3	32	98.017 139	3.136 5
4	64	49.067 674	3.140 33
5	128	24.541 228	3.141 277
6	256	12.271 538	3.141 513 7
7	512	6.135 884 5	3.141 572 86
8	1 024	3.067 956 7	3.141 587 65
9	2 048	1.533 980 2	3.141 591 357
10	4 096	0.766 990 3	3.141 592 373
11	8 192	0.383 495 1	3.141 592 501
12	16 384	0.191 747 6	3.141 592 636

从上表的计算过程可见，在计算到正 128 边形时，求得小数点后三位准确数字，正 256 边形时，小数点后四位准确，正 2 048 边形时，小数点后五位准确，正 4 096 边形时，已求出小数点后六位准确数字，即：3.141 592。此时，即可以此验证祖冲之的密率，但不知为何赵友钦要求到 16 384。

关于赵氏工作的突出意义可以概括如下：

1. 他建立起一个正确的迭代求弦的算法公式，并以此求得圆周率的近似值是 3.141 592，并以此验证祖冲之的密率：

3.141 592×113＝354.999 896

2. 他熟知半圆内圆周角是直角这一命题，借此以计算倍增边数后的边长。

3. 对倍增边数的正多边形周长的极限有正确的认识，他指出："……自第一、二次求之，以至一十二次，可谓极其精密，若节节求之，虽至千万次，其数终不穷。""其初之小方渐加、渐展、渐满、角数愈多，而其为方者不复为方，而变为圆矣。"这是刘徽之后中国数学家关于极限思想的又一次较完整的文字表述。

但也应指出，赵友钦所论只是圆内接正多边形，因而他所求出的应是圆周率的不足近似值，而$\pi=355/113$却是一个过剩近似值，惜赵氏未能指出。

本节在写作时参考了沃尔科夫（Volkov）的论文[①]。

第二节　《河防通议》中的数学内容

元沙克什（1278～1351）重订《河防通议》，是现存最早的有关河工技术、工料规章的著作。沙克什，元、明译作赡思，清修《四库全书》，改译今名。字得之，其先为大食人。13世纪初，蒙古军队西征，其祖父鲁坤东迁中国，初居丰州（内蒙古呼和浩特市），因才华出众，"太宗时，以材授真定府济南等路监榷课税使"，[②]遂定居真定（今河北正定）。父斡直，生性豪放，轻财重义，不干仕进。沙克什自幼聪颖，"生九岁，日记古经传至千言，比弱冠，以所业就正于翰林学士承旨王思廉之门，由是博极群籍，汪洋茂衍，见诸践履，皆笃实之学。故其年虽少，已为乡邦所推

① Volkov, A. Zhao Youqin and his Calculation of π, Historia Mathematica. *1997* 24 (3): 301～331

② 宋濂. 元史・赡思传. 北京：中华书局，1976

重"[1]。父亲蔑视仕途、淡于利禄的性格也深深地影响了沙克什。延祐初(1314年),开设科举,乡人劝他报名应试,他却"笑而不应"。

沙克什晚年入仕，在政治上颇有所为，1336年，拜陕西行台监察御史，上封事10条，时人叹曰："御史言及此，天下福也。"1350年，召为秘书少监，政治河事，因病未赴任，次年病逝。沙克什一生潜心于学术，"邃于经，而《易》学尤深，至于天文、地理、钟律、算数、水利，旁极外国之书，皆究极之"[2]。《元史·赡思传》中载其著述书目有：《四书阙疑》、《五经思问》、《奇偶阴阳消息图》、《老庄精诣》、《镇阳风土记》、《续东阳志》、《重订河防通议》、《西国图经》、《西域异人传》及文集30卷，但除《重订河防通议》一书外，余皆散佚。

《河防通议》原为北宋沈立所著，史载"庆历八年，河决澶渊，诏有司防塞，屯田员外郎沈立督役，因考撰前志，询择时论，著为八议。沈立在商胡，采摭大河事迹，古今利病，曰《河防通议》"[3]。此书在中国水利史上影响极大，北宋、南宋、金、元"治河者悉守为法"[4]。沙克什在师以真定壕寨官张祥（瑞之）学算时，张祥"授以是书，且曰：此监本也，得之于太史若思（即郭守敬），后十五年，复得汴本，其中全列宋丞司点检周俊《河事集》，视监本为小异，虽无门类，而援引经史，措辞稍文，论事略备。其条目纤悉，则弗若之矣。署云朝奉郎尚书屯田员外郎骑都尉沈立撰"。沙克什此时不但饱学于诗、书、易、算，而且"于水利亦素所究心"[5]。鉴于二本得失互见，其丛杂纷纠，难于讨寻。沙克什"因暇日摘而合之为一，削去冗长，考订舛讹，省其门，析其类，

---

① 宋濂. 元史·赡思传. 北京：中华书局，1976

② 宋濂. 元史·赡思传. 北京：中华书局，1976

③ ［宋］王应麟. 玉海·庆历河防通议条.

④ 宋史·沈立传. 中华书局本.

⑤ 河防通议. 四库全书提要.

使粗有条贯，以便观览，而资实用”。历经数年，在1321年完成了对汴、监二本的删改增订，著成《重订河防通议》。

今刊载于《四库全书》和《守山阁丛书》本《河防通议》，即是沙克什的重订本。是书凡2卷，6门，68目。6门是：河议第一，10目，介绍治河起源、堤埽利病、河事集序、辨信涨二水、辨土脉及河防令等；制度第二，6目，介绍开河、闭河、水平测量、修岸、卷埽的方法；料例第三，11目，有关修筑堤岸、安设闸坝及卷埽、造船的用料定额；工程第四，18目，有关修筑、开掘、砌石岸、筑墙及采料的计工方法；输运第五，18目，有关船只装载量、运输计工、物料体积及历步减土法的计工等；算法第六，5目，有关各种土方体积、工程分配及物料等的计算方法。

沙克什在重订《河防通议》时，深感数学于水利工程之重要，开河、筑坝、积垛、输运无一能离开数学，故定“算法”一门，以明其学，而且在“开河”一题中使用了“天元术”这一先进的数学方法。

“算法”门共分五类15问，基本涉及了水利工程中各种常见的数学问题，以下逐类择要介绍。

（一）杂法　共5问，为工程中求物料及运费等数学问题。如第五题：

假令有梢草一万五千三百五十束，过脚赴场送纳，议定百里脚钱二百四十四文，每束一十五斤，到场九十里，问：总该脚钱多少？

答曰：五百五贯六百二十九文

所示算法为：

$$\begin{aligned}\text{总脚钱}&=\text{每束九十里脚价}\times\text{总束数}\\&=\text{每斤九十里脚钱}\times\text{每束斤数}\times\text{总束数}\\&=\frac{244\times 90}{100}\div 100\times 15\times 15\ 350\end{aligned}$$

$=505\ 629$（文）

（二）积垛　共4问，专论一般水利工程中的积垛问题，如第一题：

假令有梢草一垛，长八十步，阔四十步，山高九尺，砧高八尺，问：为梢多少？

答曰：五千束。

法曰：长阔各以步法五尺通之，复相乘，得八百尺，寄左。又折半山高，得二十二尺，为停高，以乘前数，得万尺，为总梢积，以每束积二尺约之，合问。

此处的梢草堆成一个“上尖下方”的垛，其横截面如图5.1.3，图中AB为“砧高”，EF为“山高”，砧高＋山高/2为“亭高”，或“停高”，以“停高×阔”为截面积，再乘以长即为总梢积

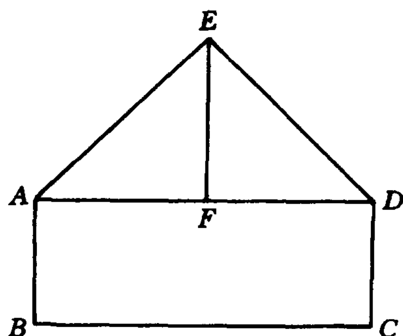


图 5.1.3

故有：

$V=$长×阔×停高

$=$长×阔×（砧高＋山高/2）

$=5\times80\times5\times40\times\left(8+\frac{9}{2}\right)$

$=1\ 000\ 000$（立方尺）

又每束积为2立方尺，则总梢数$=500\ 000$（束）。[注：本问以数计算与题答不符，长阔各以步法5尺通之后，再相乘应得80 000尺，不知是修改题设数据，还是修正答数，故存疑]。

本类还有一问是已知一条桅的长l，大头及小头的直径，求出

两头的圆周长，再应用《九章算术》的圆亭公式，以

$$V=\frac{1}{36}\ (3d_1)^2+\ (3d_2)^2+\ (3d_1\times 3d_2)]\ \times l \qquad (1)$$

求积。方法虽然正确，却走了弯路。实际上，直接由两头直径求体积，有

$$V=\frac{\pi}{4\times 3}\ (d_1^2+d_2^2+d_1d_2)\ \times l$$

若取 $\pi=3$，则系数变成$\frac{1}{4}$，非常简单。

（三）竹索积寸　此类是“算法”门中较重要的一类，涉及各种堤、台工程的土方计算。第一问求截修一段堤的体积、用功。设堤的上阔 a，下阔 b，高 h，长 l，其体积为

$$V=\frac{1}{2}\ (a+b)\ hl \qquad (2)$$

第二问是要修补长 100 步的旧堤，高 15 尺，阔 3 尺 5 寸，用 200 人，5 日完工，问取土的远近及日功多少？《河防通议》取上、下阔的平均值为停阔。由公式 (2)，堤的体积为 V＝3.5 尺×15×5 尺×100＝26 250 立方尺。用人功数为 200×5＝1 000（功）。那么一功要筑 26.25 立方尺，堤为坚土，从别处取土，为穿地，按《九章算术》“商功”章的规定，坚 3 为穿 4，因此穿土应为 26.25 立方尺×4÷3＝35 立方尺。根据历步减土法，取土 100 步则以 40 立方尺为功，101 至 200 步，每 10 步减 1.5 立方尺，因此，取土应为 133 $\frac{1}{3}$步。不过，原题答案则取每功 34 立方尺，取土 140 步。

第四问是已知堤长 900 步，高 19 丈，欲帮阔（即将堤的两侧加宽）10 步，用 2000 人，以 50 立方尺为一日功，3 日完成。问帮阔高（指停高）多少？

法曰：置每功五十尺，以二千人乘之，得一十万尺，为一日功；以三日乘之，得三十万尺，为都积，以长九百步除之，得三百三十三尺，为每步积，[注：不尽，打零。] 以一步折五尺约之，

半之，得数，以阔一十步折五十尺，半之①，为停阔，以除之。[注：盖斜帮成勾股，故用停阔]

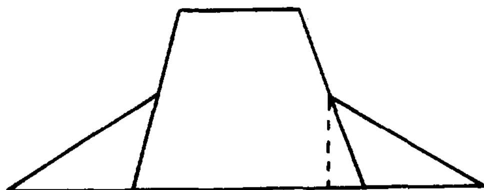


图 5.1.4

就是说，50 立方尺×2 000×3=300 000 立方尺为所帮阔的总体积，300 000 立方尺÷（5 尺×900）÷2=33.3 平方尺，是帮阔的一侧之停阔，因此，33.3 平方尺÷25 尺=1.332 尺，便得到帮阔之高。注云“斜帮成勾股”是指“停高”与“帮阔”的斜坡构成勾股形。（见图 5.1.4）

重要的是第六题：

假令筑堤长四十步，南头高六尺，下阔三丈四尺，北头高四尺，下阔二丈六尺，一侧面阔一丈。问：积几何？

答曰：二万一百三十三尺三分尺之一。

法曰：倍南高加北高得一丈六尺，又并南头上下广折半，得二十二尺为停阔，以乘之，得三百五十二尺，寄左。倍北高加南高，得一丈四尺，又并北头上下广折半，得一丈八尺为停阔，以乘之，得二百五十二尺，与寄左相并，得六百单四尺。置长四十步归尺，得二百尺，以乘之，得一十二万八百尺，为六段积，以六除之，不尽者作余分，合问。

如图 5.1.5，设南高为 h，南上阔 $AD=a$，南下阔 $BC=b$，北高为 h'，北上阔 $A'D'=a$，北下阔 $B'C'=b'$，堤长为 l，由术文，

① 各本“一可折五尺”，讹作“高一丈”，脱“半之”。今依郭书春校补（参见郭书春.《河防通议》并法门初探. 第三届中国少数民族科学史国际学术讨论会论文. 1996. 昆明）

可知其计算公式为：

$$V=\frac{l}{6}\left[(2h+h')\frac{a+b}{2}+(2h'+h)\frac{a+b'}{2}\right]$$

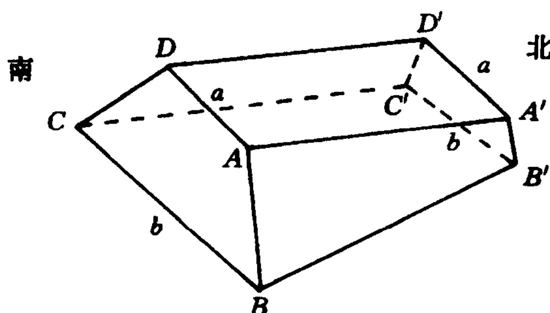


图 5.1.5

显然，此公式不是别的，正是著名的的王孝通“堤积公式”。所不同的是沙克什将堤顶面（“一侧面”）改为等阔，这更切于实际施工。

但令人不解的是第八、九两题出现了错误，第八问为求所筑方台体积，当应以

$$V=\frac{1}{3}(a_1^2+a_2^2+a_1a_2)h$$

入算，但术文错以“三十六除之”，因此答案95 232立方尺误作7 936立方尺。第九问为求所筑土牛的体积。按题设知所谓土牛实为一刍童，正确的计算公式已见于《九章算术》“商功章”：

$$V=\frac{1}{6}\left[(2a_1+a_2)b_1+(2a_2+a_1)b_2\right]h$$

《河防通议》术文却以

$$V=\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{b_1+b_2}{2}h$$

入算。即使认为是便于工程的近似计算，但也误差甚大。

（四）卷埽　埽工技术是宋元河防中最主要的技术之一，延至近代亦广为使用。"埽"不仅可用来堵口，而且可以用来筑堤、护岸，"埽"的需求量很大，卷埽成为水利工程中的重要环节，其第一问如下：

假令卷埽一束，长二十步，高阔各一丈。问：积多少，合用梢、草几何？

答曰：梢一千一百束，草二千六百二十五束。

法曰：高阔自乘，三因四除，得七十五尺，又以长一百尺乘之，得七千五百尺，为都积，以梢草积二尺除之，得三千七百五十束，乃梢草共数也。按梢三草七，三因十除得一千二百二十五束，外余一千一百束。又置梢草共数七因十除得二千六百二十五为草数。合问。

事实上，"埽"近似为一个圆柱体，故

$$V=\frac{3}{4}\times 高\times 阔\times 长 =7\ 500（立方尺）$$

此处高、阔均指埽体截面直径，3 为圆周率，每一束梢草的体积为 2 立方尺，故梢草总数$=7\ 500\div 2=3\ 750$（束），又每束梢草中，梢与草的比例为 3∶7，故总梢数$=3\ 750\times\frac{3}{10}=1\ 125$（束），但要除去"心索"，（相当于 25 束梢草，换算比率在术文前给出），故得"外余"梢草 1 100（束），总草数$=3\ 750\times\frac{7}{10}=2\ 625$（束）

（五）开河　开河门仅设一问，却是全书最难的一问。其问要开渠河一道，长 500 步，深 10 尺，东头上阔 1 040 尺，下阔 1 000 尺，西头上阔 890 尺，下阔 850 尺，其总体积为 2 362 500 立方尺，100 步取土，一日功为 40 立方尺，计 590 625 功。今欲先作 144 450 功，问所截的长、阔各是多少？

法曰：置东头上、下阔，相并，折半，得一千单二十尺，为停大阔。又置西头上、下阔，相并，折半，得八百七十尺，为停

小阔。以减停大阔，余一百五十尺，为阔差。以正长五百步除之，得三寸，为每步差。立天元为截长，$\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$①。以乘每步差，为截住处阔差$\begin{matrix}0.3\\0\end{matrix}$。加停小阔，共为截处阔$\begin{matrix}0.3\\870\end{matrix}$。加停大阔，为二段停截阔$\begin{matrix}0.3\\1\ 890\end{matrix}$，以深一丈乘之，为二段每尺积$\begin{matrix}3\\18\ 900\end{matrix}$，五因，为二段每步积$\begin{matrix}15\\94\ 500\end{matrix}$，以元一截长乘之，为二段截积$\begin{matrix}15\\94\ 500\\0\end{matrix}$。寄左。元截功归积，二之，得一千一百五十五万六千尺。与寄左相消，得一千一百五十五万六千尺，为实。九万四千五百尺，从。一十五，从隅，平方开之，得一百二十步，为截长。置截功，归积，得五百七十七万八千尺；以截长，归尺，除之，得九千六百三十尺，以深一丈除之，得九百六十三尺，倍之，内减停大阔一千单二十尺，余九百单六尺，为截停阔。倍之，得一千八百一十二尺，为上、下截阔。并内减上、下阔差四十尺，余，半之，得八百八十六尺，为截下阔，复加四十尺，得九百二十六尺，为截上阔，合问。

沙克什用天元术解决这一问题。设渠河的长为 l，深为 h，东头上阔 a_1、下阔 a_2，西头上阔 b_1、下阔 b_2（如图 5.1.6）。通过出入相补，可以拼成长 l，深 h，东头为阔 $a=\frac{1}{2}(a_1+a_2)$，西头为阔 $b=\frac{1}{2}(b_1+b_2)$ 的直接柱体。“立天元一”即设 x 为所截部分之长的步数，术文下一步先求截住处停阔。术文以$\frac{a-b}{l}$为“每步差”，即东西阔差的平均变化率，因此，截住处停阔与西头停阔之差则为$\frac{a-b}{l}x$，此即术文“以乘每步差，为截住处阔差”之意。进

① 原文天元均以汉字筹式给出，今代以阿拉伯数字.

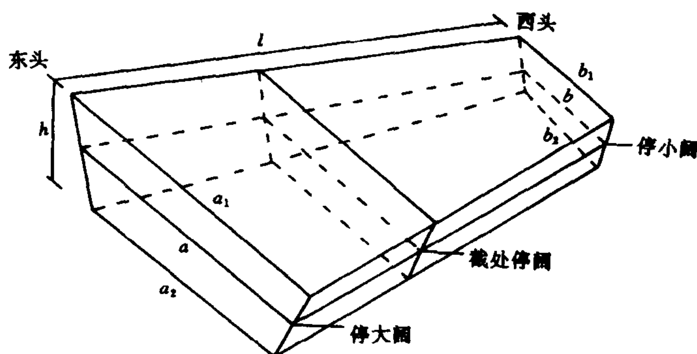


图 5.1.6

而加西头停阔（“停小阔”），得$\frac{a-b}{l}x+b$，为截住处停阔，再加东头停阔，得$\frac{a-b}{l}x+a+b$，为所截部分两端停阔的平均值的 2 倍，以深 h 乘之，得 $(\frac{a-b}{l}x+a+b)h$，就是每尺体积的 2 倍，乘以 5，得 $5(\frac{a-b}{l}x+a+b)h$，便是每步体积的 2 倍。乘以所截长的步数 x，得 $5(\frac{a-b}{l}x+a+b)hx=5\frac{a-b}{l}hx^2+5(a+b)hx$，即所截部分体积的 2 倍。将 a,b,l,h 的数值代入，得 $15x^2+94\ 500x$；将所截部分所用的功 144 450 化成积尺，为 40 立方尺/功×144 450=5 778 000 立方尺。乘以 2，也是所截体积的 2 倍，将它与上多项式相消，得开方式

$$15x^2+94\ 500x=11\ 556\ 000$$

开方，得 $x=120$（步），据此可依次求出截处下阔 886 尺，截处上阔为 926 尺。沙克什在书中由“二段每尺积”变为“二段每步积”时用“五因”是不对的，应用“五约”。但是往下的计算无误。

必须指出的是，在上述推导过程中还有一处失误，原术计算

截住处停阔时是从西头考虑截长的（见图 5.1.7），而计算所截部分两头停阔的平均值，则又以东头考虑，若考虑自东头起的截长，即“立天元一”为东头的截长，此时截住处的停阔应为 $a-\frac{a-b}{l}x$（见图 5.1.7）。所截部分两端停阔的平均值的 2 倍应为 $2a-\frac{a-b}{l}x$，那么，开方式应为

$$5\left(2a-\frac{a-b}{l}x\right)hx=1\ 155\ 600$$

将 a，b，l，h 的值代入，得

$$-x^2+6\ 800x=770\ 400$$

$$x \doteq 115.25 \text{ 尺}$$

这就是自东头起所截部分的长度。那么截住处下阔约为 965.38 尺，上阔约为 1 005.38 尺。

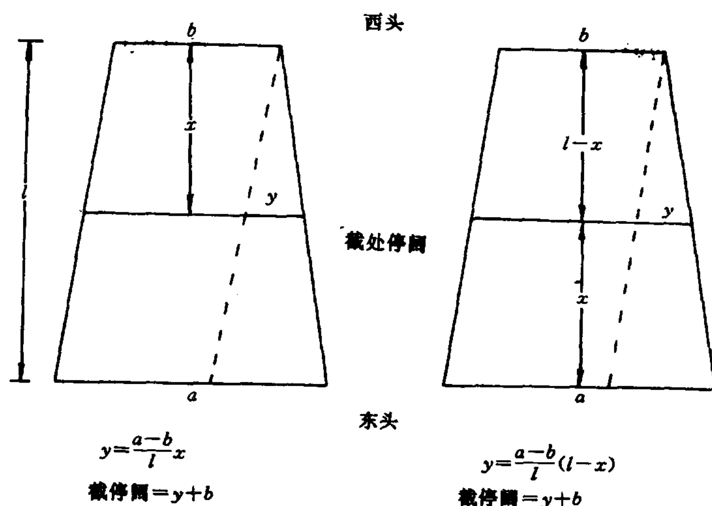


图 5.1.7

最后，关于沙克什的天元术是谁所授？钱宝琮据沙克什在《河防通议》中的自叙，“疑是郭守敬任都水监所介绍者也”，[①] 李迪分析沙克什列方程步骤与李冶完全一致，认为“李冶和沙克什的天元术是一脉相承的。”[②] 事实上，《元史・赡思传》中提供了这一问题的重要线索，其称“（沙克什）比弱冠，以所业就正于翰林学士承旨王思廉之门，由是博极群籍，汪洋茂衍”。王思廉之师为元好问，李冶在封龙山讲学时，曾与元好问、张德辉交友甚密，时人称为“龙山三老”，可见，沙克什还是元好问的再传弟子。13 世纪中叶，在现在河北省南部地区，出现了一个以天元术为代表的数学研究与教育中心。后来的沙克什，聪颖好学，掌握这一先进的数学方法，当是水到渠成之事。师承关系如下：

郭守敬→张　祥┐
元好问→王思廉┘→沙克什
李　冶

---

① 钱宝琮. 金元之际数学之传授. 载《钱宝琮科学史论文集》. 北京：科学出版社，1983

② 李迪. 中国数学史简编. 沈阳：辽宁人民出版社，1984. 207

第二章 元末明初的民间数学与《永乐大典》中之算书

本章主要讲述元末明初期间的民间数学著作《丁巨算法》、《算法全能集》、《详明算法》、《透帘细草》、《通源算法》等的基本内容。最后把不好安排的《永乐大典》中的数学与明初之数学教育放到这里。

第一节 《丁巨算法》

丁巨是元代后期数学家，1355 年写成《丁巨算法》。他在该书序言中说："由唐及宋，皆有专门（指数学）。自后时尚浮辞，动言大纲，不计名物。其有通者，不过胥吏。士类以科举故，未暇笃实。"① 这段话便道出了当时数学不景气的原因，一是封建伦理束缚了人们的思想，二是科举制引导知识分子远离自然科学，远离实际。应该指明的是，当时的科举以程、朱理学为正统，空谈天理，轻视有实用价值的科学技术，这完全不同于杰出科学家所进行的超越实用的纯科学研究。由于理学在社会上渐居统治地位，研究数学已被认为是"不伍时流"，甚至是"玩物丧志"了。但数学高峰刚刚过去，社会上的数学著作尚多，所以丁巨才能"上自九章，下至小法，数十百家，摘取要略。"他在理学盛行之时不顾人们的嘲笑，认真钻研数学，这种精神是可贵的。他说："独余幼贱，不伍时流，经籍之余事，法物度轨，则间尝用心。"正是这种

① 本节均引自（元）丁巨. 丁巨算法.《从书集成初编》本. 商务印书馆，1936

执着的“用心”精神，使他写成应用数学著作《丁巨算法》8卷。

丁巨充分认识到四则运算在算法中的基础地位及其相互关系。他说：“乘以聚之，除以散之，通乘除已，斯可为法。乘之积为加，除之散为减，加减为乘除之变。故以乘除加减四法为之首。”谈到算法中的难点，他说：“凡算之法，乘除不难，通分乃难也。”

丁巨对数学的重要性也有一定认识，他说：“大为十百、十千、十万、百万、千万、万万、亿、兆、京、垓、秭、穰、沟、涧、正、载、极；小则分、厘、毫、丝、忽、微、纤、纱、尘、埃、渺、漠、幽、虚、空、净，无为尽。一十百千万互为消长，由是而天高地厚，日月往来，律吕声音，阴阳幽显，因此测彼，精入鬼神。”这就是说，数学的意义不仅表现在自身，还表现在天文、地理、音乐及人事的各方面，数学的应用是既广泛又深刻的。这里的“鬼神”并非迷信，而是指深奥难测的事物。“精入鬼神”及极言数学应用之深。看来丁巨是很想在数学上大有作为的，只是水落船低，难以在理论上有所突破了。

《丁巨算法》是一部以四则运算为主的应用数学著作。实际上，书中还包括开方运算。该书体例为习题集，总题数不详。《知不足斋丛书》本收62题，《丛书集成初编》本据此排印。《永乐大典》卷16343～16344中还收入27题。大约只及全书半数。

例如第1题：“今有人共买鸡，不知人数鸡价，但云人出四钱，少一钱；人出五钱，多五钱。问：人数、物价各几何？答曰六人，二两五钱。”其术为：置四钱于右上，少一钱于右下，五钱于左上，多五钱于左下。以多五钱少一钱并之，得六钱为实。以所出率以少减多，余一为法，实如法得六人。以所出率四乘之，得二两四钱。增其所少，得二两五钱。若以所出率五乘之，减其多，亦得二两五钱。

这是一个“盈不足术”问题，其解法继承了《九章算术》。

再如第10题：“今有正粮五百七十九石八斗六升七合，每石

减免二斗，问：实征米若干？答曰四百六十三石八斗九升三合六勺。”这是一个小数乘法问题，但运算不如李冶简便，因为小数部分均有数名。

第17题：“今有税务法则，三十两纳税钱一两。今有客持丝六百四十斤，每斤价钱三两二钱五分二厘。问：税钱多少？答曰：六十九两三钱七分六厘。置丝斤以每斤价乘之为实，以三十两为法除之。”这是一道乘除混合运算题。

《永乐大典》所收《丁巨算法》中，包括复比例及开平方、开立方问题。

例如“雇车一辆，行九百里，载二千五百斤，与钱一百八十两；今行一千六百里，与钱四百六十七两二钱，问：载重几何？答曰三千六百五十斤。”书中给出筹式如下：

𝍨，𝍪𝍤，𝍠𝍰；𝍩𝍥，戊缺，𝍣𝍮𝍦𝍪，

这是一个复比例问题，在甲、乙、丙、丁、戊、己6个量中，戊为所求量。

再如“今有积一万五千六百二十五尺，问：为立方一面几何？答曰二十五尺。”这是一个开立方问题。其术为：置积尺，以一算于五尺之下，常超二位，至位之下。上商二，呼一二生廉二，二二生方四，呼二四如八，去积八千尺，余七千六百二十五尺。呼一二添廉二，二四添方八，又呼一二添廉二，方法一退，廉法二退，下法三退。上商五，呼五六生方三十，五五生方二十五，命商除积，一五如五，去积五十尺，五五二十五，去积二千五百尺，二五一十，去积一百尺，五五二十五，去积二十五尺适尽。
显然，此题采用的是宋代以来的增乘开方法。

《丁巨算法》内的算题虽然简单，内容还是比较丰富的。从算法来说，包括加、减、乘、除、乘方、开方、小数、分数运算及相关的约分、通分方法、复比例及盈不足术、等差级数求和公式及线性方程组解法等。从应用范围来说，遍及当时商业活动的方

方面面，包括“就物抽分”，还讨论了与生产有关的体积问题。尤其引人注目的是，书中给出了各种常用单位的换算关系，这对于算法在实际生活中的运用大有补益。例如：“权衡之数起于黍，十黍为一絫，十絫为一铢，六铢为一分，四分为一两。十六两为一斤，十五斤为一称，二称为一钧，四钧为一硕。”当然，进位制的不统一也反映了时代的局限性。

在《丁巨算法》中，线性方程组解法算是比较复杂的代数问题了，但其难度不超过《九章算术》。如“今有壮军一名，弱军二名，老军三名，各拖船一只，皆载八十石，至滩下俱不得上。若壮军借弱军一名，弱军借老军一名，老军借壮军一名，皆得上滩。问：壮、弱、老军各力推几何？”依术列筹式如下

左行	中行	右行
|		|
	||	|
|||	|	
$\overset{\perp}{\equiv}$	$\overset{\perp}{\equiv}$	$\overset{\perp}{\equiv}$

相当于

$$\begin{cases} x+y=80 \\ 2y+z=80 \\ x+3z=80 \end{cases}$$

其中 x 为壮军，y 为弱军，z 为老军，书中是以直除法解这种方程组的。

商业化是《丁巨算法》的特点之一，大量题目涉及物价、买卖、利息、税收等。例如“今有钞二十五两四分二厘五毫买盐，每斤价二钱八分。问：买几斤？”“今有糖五百六十八斤十两，每斤价六两四钱八分。问：总价多少？”“今有面一百七十二斤零二两，卖钞二十五两五钱，问：每两该面若干？”“今有人典钞，不记本钱，每月息三分，今二十四个月二十一日，通该本息钞五十四锭

三十三两三钱七分。问：本息各几何？”“今有布九千三百八十四匹，出关税之，每三十尺税布一尺，今共税讫三百一十三匹，却贴与客人钞一两七钱。问：每匹价多少？”等等。

书中的就物抽分问题反映了当时的商业活动。例如第 15 题：“今有西县粜麦四百六十五石三斗，每石价二两四钱，今雇脚载至东县，每石脚钱三钱半，今为无钱，只于麦内抽取。问：合与脚钱并到县麦多少？”丁巨是以比例方法求解的。依术列式

$$\frac{35}{240+35}=\frac{\text{脚钱麦}}{4\ 653},$$

所以

$$\text{脚钱麦}=\frac{35\times 4\ 653}{240+35}。$$

算法歌诀化是《丁巨算法》的另一特点。该书口诀与珠算接近，体现了我国数学由筹算体系向珠算体系过渡的时代精神。例如减法口诀：二六去一十二，三六去一十八，四六去二十四……；归除口诀：三一三十一，三二六十二，逢三进成十……七一下加三……八二下加四，等等。

书中还有所谓“撞归”口诀，即“二归撞归九十二，三归撞归九十三，四归撞归九十四……九归撞归九十九。”下面以三归为例说明撞归的意义。如果除数的首位是 3，见被除数的首位也是 3，本应“逢三进成十”，但被除数的后面几位数字不够“除去”除数的后面几位数字，于是将被除数的首位 3 改成 9，并于下一位加上 3，这个 9 就是由撞归所得的“商数”。若用现代数学符号表示，则三归的意思是：$\frac{30}{3}\doteq 9+\frac{2}{3}$。

该书在几何计算方面，也体现了歌诀化的倾向。如仓窖歌：“方是阔乘，高乘斛除。圆周自乘，以高乘之。十二而一，以斛除施。上下之方，则各自乘。相乘三并，深乘见真。方三面一，圆四九成。平地四九，倚壁二九。内角一九，外角三九。斛法先定。”

值得注意的是，丁巨继承了朱世杰的垛积理论，以歌诀形式

给出一系列高阶等差级数求和公式。例如："草垛添尖，以元乘今，折半积真；三角添一，又添二乘，六而一精；四角添一，又添半乘，三而一盈。" 即

茭草垛：$1+2+3+\cdots+n$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)$$

三角垛：$1+3+6+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

四角垛：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

书中还载有四角长垛、圆箭、方箭等垛积问题的求积歌诀。

虽然丁巨在数学理论上没什么创新，但他在传播古代数学知识、保存古算史料方面的功绩是不能抹煞的。

第二节　《算法全能集》与《详明算法》

《算法全能集》和《详明算法》是两部元末成书而内容很相似的数学著作，因此把它们放在一节里进行讨论。

《算法全能集》为元末贾亨所撰，分上下二卷，共126题。卷上开始给出"总说五项"，即当时通行的钱、粮、端匹、斤称及田亩的单位制及进位制。接着有"常用法二十项"，即常用的算法和根据算法安排的练习题，共20类，它们是因法、加法、乘法、减法、归法、归除、求一、商除、异乘同除、就物抽分（以上为卷上）；差分、和合差分、端匹、斤称、堆垛、盘量仓窖、丈量田亩、修筑、约分、开平方（以上为卷下）。书中算法进一步歌诀化。上述20法，每种方法都有歌。例如：

因法歌曰：

“九因之法甚分明，合数常将记在心。

下十过身前一位，如今之就本身寻。”

加法歌曰：

“加法原来一是宗，算家弃一使令通。

十须就位零居次，下手先从末用工。”

乘法歌曰：

“下乘之法此为真，位数先将第二因。

三四五来乘遍了，却将本位破其身。”

归法歌曰：

“九归之法乃分平，凑数从来有见成。

数若有多归作十，归如不倒搭添行。

一归无法定身除。二归见一添为五，见二进一十。

三归见一三十一，见二六十二，

见三进一十。四归见一二十二，见二添为五，

见三七十二，见四进一十。

五归就身加一倍，见五进一十。……”

开平方歌曰：

“开方以积使商除，除得其间上置诸。

下另倍为方法数，却将方倍减其余。

得其次数上商续，方下傍边也续钦。

上下再将续除续；积之数尽自昭如。”

贾亨还把朱世杰的除法口诀和丁巨的撞归法结合在一起，编成归除歌诀如下：

“唯有归除法更奇，将身归了次除之。

有归若是无除数，起一回将原数施。

或值本归归不得，撞归之法莫教迟。

若还识得中间法，算者并无差一厘。”

具体方法为：“二归为九十二，三归为九十三，四归为九十四，

五归为九十五，六归为九十六，七归为九十七，八归为九十八，九归为九十九。”

每一种歌诀后面都有相应的算题，供读者练习算法。例如，归法后的算题为：

今有钞二百六十五两三钱二分，问：每人分钞几何？答曰假令将作：

（二归）二人分，每人该钞一百三十二两六钱六分。（三归）三人分，每人该钞八十八两四钱四分。（四归）四人分，每人该钞六十六两三钱三分。（五归）五人分，每人该钞五十三两六分四厘。（六归）六人分，每人该钞四十四两二钱二分。（七归）七人分，每人该钞三十七两九钱二厘八毫五丝七忽。（八归）八人分，每人该钞三十三两一钱六分五厘。（九归）九人分，每人该钞二十九两四钱八分。法曰置都钞在地，以人数归之，合问。

书中的修筑歌、盘量仓窖歌、丈量田亩歌则反映了当时的几何测量方法。

修筑歌曰：

“算中有法筑长城，上下将来半折平。

高以乘之长又续，此为城积甚分明。

盘量仓窖歌曰：

方仓长用阔相乘，堆与圆仓周自行。

各再以高乘见积，唯圆十二一中分。

尖堆法用三十六，倚壁须分十八停。

内角取时如九一，外角三九积分明。

若还方窖兼圆窖，上下周方各自乘。

乘了另将上乘下，并三为一再乘深。

如三而一为方积，三十六兮圆积成。

斛法却将除见数，一升一合不差争。”

引人注目的是，丈量田亩歌体现了出入相补原理。歌曰：

“古者量田较阔长，全凭绳尺以牵量。

一形虽有一般法，唯有方田法易详。

若见㖞斜并凹曲，直须裨补取为方。

却将乘实为田积，二四除之亩法强。”

歌中指出，每种平面图形有一定的求积方法，但都以方田（即矩形）面积公式为基础。实际上，方田面积公式可以看作公理。遇到不规则图形时，只要用割补法将其化为方形就可以了。这种方法在土地测量中很有用处。书中列举了梯形田、勾股田、四不等田、梭田、眉形田、牛角田、环形田等形状各异的平面图形，最后都归结为方田面积。

例如“今有四不等田，东长二十八步，西长三十二步，南阔四十步，北阔五十步。问：该田几何？答曰：该田五亩一百五十步。法曰并东西长折半，并南北阔折半，长阔相乘为积，亩法除之，合问。”这便是一个利用矩形面积公式求四不等田面积的实例。

下面再摘录两个直田形面积问题：

例 1. 今有直田长三十五步，两隅斜相去三十七步。问：该阔几何？答曰：该阔一十二步。

法曰：以长阔步各自乘，二位相减，余一百四十四步。开平方除之，合问。

例 2. 今有直田长阔相和一百一十九步，两斜相去八十九步。问：该田几何？答曰：一十三亩。

法曰：以斜步自乘，与和步自乘相减，余数折半，得三千三百二十步，为积。亩法除之，合问。

显然，例 2 采用了公式

$$(a+b)^2-c^2=2ab$$

其中　$c^2=a^2+b^2$。

《详明算法》是元末安止斋、何平子所撰另一部应用算书，其体例、内容与《算法全能集》接近。但该书更便于初学者学习，更

像一本入门书。卷首给出比较充分的预备知识，除《算法全能集》已有的斗斛、丈尺、斤称、田亩等度量衡制外，还有如下各项：

九章名数。给出经典著作《九章算术》的各卷卷名并简介其内容。

小大名数。给出十进位的小数单位分、厘、毫、丝、忽、微、纤、沙，以及十进位的大数单位，由十、百、千、万直到千万亿，并明确提出“小数始于一”，“大数始于一”。

九九合数。即小九九，顺序与现在一致。

口诀。给出基本的算法口诀。

乘除见总。详细给出不同情况（如小乘大、大乘小、小除大、大除小等）下如何进行乘、除运算。

值得注意的是，该书取材通俗易懂，凡不切于初学者概不采用。例如，万以上的大数单位只给出亿，而没有出现兆、京、垓、秭、穰、沟、间、正等不常用的单位。

《详明算法》分上、下二卷，共114题。同《算法全能集》一样，也列出常用法20项。上卷包括：1. 因法，2. 加法，3. 乘法，4. 归法，5. 减法，6. 归除，7. 求一，8. 商除，9. 约分；下卷包括：10. 异乘同除，11. 就物抽分，12. 差分，13. 和合差分，14. 端匹，15. 斤秤，16. 堆垛，17. 盘量仓窖，18. 丈量田亩，19. 田亩纽粮，20. 修筑。同《算法全能集》相比，此书少了“开平方”一项而多了“田亩纽粮”一项。书中的各种算法也以歌诀形式给出，而且有些歌诀在两书中完全相同，如乘法歌、求一歌、端匹歌、斤秤歌、修筑歌。此外，归法歌、差分歌、盘量仓窖歌与丈量田亩歌在两书中只有一字之差。还有些歌诀在两书中大体相同，如归法歌、归除歌、异乘同除歌、就物抽分歌、和合差分歌、堆垛歌。

《详明算法》中的归法歌为：

“九归之法乃分平，凑数从来有见成。

数若有多归作十，归如不尽搭添行。”

显然，只有末句第四字与《算法全能集》不同，方法是完全一致的。

《详明算法》中的归除歌为：

“惟有归除法更奇，将身归了次除之。

有归若是无除数，起一回将元数施。

或遇本归归不得，撞归之法莫教迟。

若人识得中间意，算学虽深可尽知。”

与《算法全能集》中的归除歌相比，只有最末两句不同。下以《详明算法》中的 26 532÷8 为例，说明当时如何以口诀解题。（括号内的口诀是《详明算法》中原有的。）

𝍡𝍮𝍤𝍫𝍡→𝍡𝍱𝍤𝍫𝍡（八二下加四）→𝍢𝍪𝍤𝍫𝍡（逢八进一十）→𝍢𝍪𝍨𝍫𝍡（八二下加四）→𝍢𝍫𝍠𝍫𝍡（逢八进一十）→𝍢𝍫𝍠𝍬𝍡（八一下加二）→𝍢𝍫𝍠𝍮𝍣（八五六十二）→𝍢𝍫𝍠𝍮𝍤（八四添作五）。最后的 3 316.5 便是商。

归除歌的第五句在《算法全能集》中是“或值本归归不得”，在《详明算法》中是“或遇本归归不得”；第七、八句在《算法全能集》中是“若还认得中间法，算者并无差一厘”，在《详明算法》中是“若人识得中间意，算学虽深可尽知。”除此以外，两歌尽同。但《详明算法》中的撞归口诀比《算法全能集》更为显明，即“（二归）见二无除作九二，（三归）见三无除作九三，…（九归）见九无除作九九。”除数首位为 1 时，丁巨、贾亨及安止斋、何平子等都主张用“定身除”法，也就是“减法代除”，所以不用撞归法。

再如“就物抽分歌”，在《算法全能集》中为：

“抽分法就物中抽，脚价乘他都物休。

另用脚钱答物价，以为其法要除周。

除来便见脚之总，余者皆为主合留。

算者不须求别诀，只将此法记心头。”

在《详明算法》中为：

“抽分法就物中抽，脚价乘他都物求。

别用脚钱搭物价，以其为法要除周。

除来便见脚之总，余者皆为主合留。

算者不须求别诀，只将此法记心头。”

这两首歌中，只有五个字不同，所述算法是完全相同的。例如：“今有雇船粟一百三十七石八斗，每斗价一钱二分五厘，该脚钞三分五厘，今为无钞，就粟内抽分。问：各该几何？”[1] 按歌诀列式，则

$$脚粟=\frac{35\times1\ 378}{125+35}$$

总粟减去脚粟便为主粟了。

看来，《算法全能集》与《详明算法》两书的作者必有一方以另一方的书为蓝本，从中援引了大量内容。由于《算法全能集》有元刊本，而现存最早的《详明算法》是1373年刻本，已经是明初了。据此推测，可能《详明算法》成书较晚，因而吸收了《算法全能集》的数学思想及具体内容。安止斋在序言中强调，学数学“须明立法之道”。他认为数学虽“居六艺之末”，“然非专心致志亦莫极其妙”。并说：“深究其理，可会于心。”“非若经学之难明，理学之难穷也。”这些见解是正确的，且为《算法全能集》所无。

① 《算法全能集》和《详明算法》中都有此题，文字稍异．此处引文取自《算法全能集》．

第三节　《通源算法》、《透帘细草》及其他

严恭《通源算法》

严恭是元明之际的数学家，姑苏（今苏州）人。自幼喜爱数学，熟读《算经十书》，深明算理。成年后进入仕途，工作之余悉心钻研数学，“益致其精”[①]。洪武五年（1372 年）发表《通源算法》一卷，并请朝列大夫赵瑀为之作序。他对赵瑀说，元末兵乱，算书散失，自己特意搜集算题，以成是书，欲付梓“以广其术”[②]。但并无刻本传世，不知该书是否印刷过。

在元末明初，《通源算法》是理论水平较高的数学著作。它使日趋衰落的传统数学稍有起色，但不能阻止数学理论衰退的总趋势。

现存《通源算法》已非完书，《诸家算法》中有 29 题，《永乐大典》中有 35 题（载于卷 16343 和卷 16344）。这些题的内容比较广泛，从数学本身来说，包括算术、几何、代数、同余式理论等各方面知识。从数学的应用来说，涉及各种商业、手工业问题，以及物体比重等。看来，严恭是力求把数学用于社会生活的。

商业问题如“今有米麦共一千石，共该价一万六千八百一十四两七钱一分，只云米石价一十七两二钱，麦石价一十四两五钱。问：米麦各若干？”

再如“今有丁年五月十六日借人钱作本，于戊年七月二十八日付还，其年有闰，失记原借本钱，止知月息五分，今凭放钱主算，该本利一百七十七两。问：原借本钱并利息各若干？”

手工业问题如“今有三色金二十两，内九分色四两，七分色

---

① 赵瑀．通源算法序．取自抄本《诸家算法》．

② 赵瑀．通源算法序．取自抄本《诸家算法》．

七两，五分色九两，欲通熔炼。问：合得分数若干?”

再如“今有净线一千二百四十八斤四两八钱，每净线一两练熟线七钱五分。问：熟线若干?”等等。

在算术方面，《通源算法》中的比例问题是应该提到的。

例如：“今有织染缎疋，每荒丝一十两得生线九两，每生线一两练熟线七钱五分，每熟线一两却加颜料三分。今织成缎子五百八十四疋，通称重九百六十四斤四两九钱八分八厘。问：通用荒丝及每疋斤重料例各若干?”依术列式，通用荒丝为（以两为单位）

$$\frac{15\ 428.988\times 10}{9\times 0.75+9\times 0.75\times 0.03}$$

与《丁巨算法》、《算法全能集》等书相比，这种比例问题就算比较复杂的了。

书中还有不少问题涉及到物质比重。例如：“今有金方八寸，问：重若干?”“今有玉围圆九寸，厚三寸，问：重若干?”“今有铁墩面方一尺，底方一尺三寸，高八寸，问：重若干?”等等。作者根据《夏侯阳算经》给出各种常见物质比重表：金方寸重一斤，银方寸重一十四两，玉方寸重一十二两，锡方寸重九两五钱，铜方寸重七两五钱，铁方寸重六两，石方寸重三两。实际上，这类问题不仅包括算术知识，还包括简单的几何与物理知识。

该书的债务问题广泛采用了百分数，如：“今有丁年五月十六日借钱一百两，于戊年七月二十八日付还，其年有闰，不知月息分数，今算该利息七十七两，问：月息几分?……答曰：五分。”这里的五分即 5%。依术列式

$$77\div 15.4=5\text{（两）}$$

即借钱 100 两的利息数，故曰五分。同样，“月息二分五厘”即月息 2.5%。百分数的采用加强了算术的规范性，有一定的实用价值。只是当时还没有表示百分数的特定符号。

在代数方面，书中载有筹算开平方、开立方法，并利用方程研究了等差级数。例如："今有给与人钱，初一人与三钱，次一人与四钱，以次转多一钱，与讫还收聚，却均分之，各人得一百钱。问：人数若干？"依术列式：

$$(100-3)\times 2+1=195。$$

此式显然由方程

$$100n=n\times 3+\frac{n\times(n-1)}{2}$$

推得。其中 n 即人数，也是等差级数的项数。此题不仅表明严恭懂得等差级数求和公式，而且表明他是从纯数学角度来研究这一问题，因为此题显然是为阐明算法而虚构的。

由于严恭对理论研究的重视，得到了新的等差级数求和公式。例如："今有负债期约，如违限一日罚钱二两五钱，二日罚钱五两，如是日多二两五钱，今违限一十二日。问：罚钱若干？……术曰：置一十二日加一乘之，得一百五十六，又以二两五钱乘之，得三百九十两，半之即得。"术文实际给出 $a_1=d$ 时的等差级数求和公式

$$S_n=\frac{n\times(n+1)\times a_1}{2}$$

（a_1 为首项，d 为公差，n 为项数。）

严恭是元末明初继续研究同余式理论的唯一数学家，这也是值得一提的。例如："今有散钱不知其数，作七十七陌穿之，欠五十文掺穿；若作七十八陌穿之，不多不少。问：钱数若干？答曰：二千一百六文。"这里提出了解一次同余式组

$$N\equiv(77-50)\pmod{77}\equiv 0\pmod{78}$$

的问题。依术列式

$$78^2\times(77-50)-n\times 78\times 77$$

当 $n=27$ 时，上式为 2106，合问。此题的乘率为 78，这样大的数

不可能靠试猜的方法得到，所以说严恭懂得求乘率的方法。在他没有提示新方法的情况下，应该认为他是按秦九韶的“大衍求一术”来求乘率的。但秦氏的一次同余式问题多是“余几”或“剩几”，而此题却是“欠几”，这说明严恭能够灵活运用剩余定理。

再如“今有瓦不知其数，若三十四片作一堆，剩五片；若三十六片作一堆，剩七片。问：瓦若干？答曰：一千一百九十五片。”此题给出一次同余式组

$$N\equiv 5\ (\mathrm{mod}34)\ \equiv 7\ (\mathrm{mod}36)。$$

依术列式

$$\frac{34\times\ (34+1)}{2}\times 7+\frac{36\times\ (36-1)}{2}\times 5-n\times 34\times 36。$$

式中除以 2 是为了化非互素模数为互素模数，n 取 5 时，上式为 1 195，合问。此题进一步表明，严恭掌握了一次同余式组的一般解法。他这种重视纯数学研究的精神，在元明之际是难能可贵的。不过总的来说，严恭的同余式理论水平并没有超过秦九韶，其工作的主要意义在于使秦氏理论不致失传。

佚名的《透帘细草》

现存《透帘细草》，作者不详，只知成书于元代后期。该书为习题集形式，有法、有草。共 46 题，不分卷。书中许多题目与当时的商业活动有关，例如第 24 题，便把比例算法用于就物抽分。该题为：“今有粟一千九百八十六石七斗，每斗价钱六十五文，欲令雇人搬入仓，每斗脚钱一十五文，其粟已都搬到仓，却无脚钱，只于其粟内抽粟，充折其脚钱。问：合与脚粟及到仓粟米多少？”依本题法，到仓粟为

$$\frac{65\times 1\ 986.7}{65+15}=1\ 614.197\ 35\ (石)$$

其解法与《丁巨算法》第十五题是一致的。这种就物抽分问题在元代后期的算书中不断出现，反映了商业数学的特点。

《透帘细草》保留了元代高阶等差级数方面的某些成果。如第10题："今有三角果子一堆，积三百六十四个。问：底子一面多少？答曰：一十二个。法曰：置积六之为实，以二为从，三为从廉，立方开之，得数也。"依法列式，则

$$x^3+3x^2+2x=6\times 364$$

显然，上式由三角垛公式

$$S=\frac{1}{6}n\ (n+1)\ (n+2)$$

得来。

此书的写作目的主要是普及常用的数学知识，但在数学理论上也有所成就。例如第8题："今有方锥一所，下方二丈四尺，高三丈二尺，欲于上方六尺，截成方台。问：截高几何？"（如图5.2.1）"法曰：置高三丈二尺，以上方六尺乘之，得一十九丈二尺。以下方二丈四尺除之，得截高数。"依法列式：

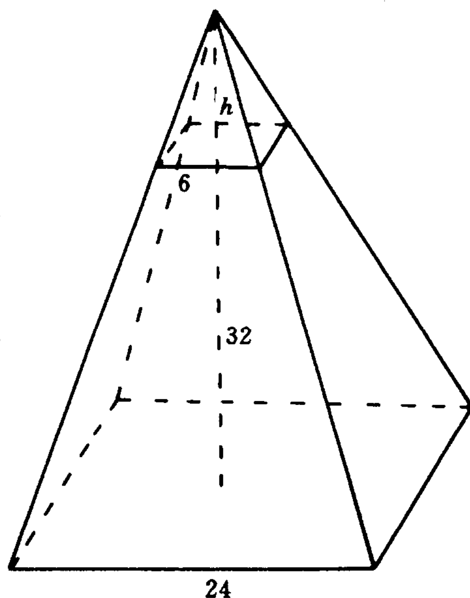


图5.2.1　方锥图

$$\frac{6}{24}=\frac{h}{32}$$

$$所以\ h=\frac{6\times 32}{24}=8(尺)$$

显然，作者已懂得用平行

于棱锥底面的平面截棱锥，截得的小棱锥与原棱锥相似，并懂得相似多面体的对应线段成比例。这种思想是以往数学家所没有的。作者首次研究了相似多面体的性质，这是他对我国立体几何的一项贡献。但在整个明代，截割多面体及多面体相似问题没有得到进一步的发展。

佚名的《锦囊启源》

与《透帘细草》同时代的应用算书还有《锦囊启源》，已非完书，亦不知作者姓名。现存《诸家算法》中载有该书的 21 题，《永乐大典》(卷 16343～16344) 中载有另外的 9 题。这些题都是简单的商业问题，只用乘除法即可，未出现开方运算。书中各题均给出答案。例如："今有白沙糖一千一百一十一斤一十两，每斤白银二钱三分四厘，问：银多少？答曰：二百六十两一钱二分二毫半。"有些题还在"答"后给出法。例如："今有课银三十六两九钱三分六厘，欲换安息香，每斤用银九分六厘，该多少？答曰：三百八十四斤一十二两。法曰：下银在地为实，以斤价作法除之，得三百八十四斤七分五厘，零数加六为两也。"

只要懂得单位换算，书中各题便很容易掌握了。因为多用重量单位，所以在书首给出古今重量单位的进位制。又给出"斤见两歌"，即"一退一六，二退三二，三退四八，四退六四，五退八，六退九六，七为一一二，八为一二八，九为一四四。"

《授时历捷法立成》

元代《授时历》颁行不久，朝鲜忠宣王便派崔诚之来中国，"求师而受业，俱得其不传之妙"[①]。回国后收徒姜保而授之，姜保

① 孙光嗣. 授时历捷法立成序. 转引自李俨.《十三、十四世纪中国民间数学》. 北京：科学出版社，1957. 47

“一学而尽通其法……忠肃王嘉其能。”①为了普及《授时历》中的历法和数学知识，姜保写成《授时历捷法立成》一书，于1346年刊行。

该书末附有源于中国的“乘除法歌诀”。下面摘引数段。

留头乘法：

“初呼言十下靠身，若言如者隔位陈。

乘到留头一位数，逢十就身如退加。

明指留头定数诀，一下能知乎算真。”

飞归除法：

“头位须当用归歌，次位还将除剪挪。

有减之时即须减，不及减者借身过。

本数不满飞作九，不言十数隔位蹉。

大小算法皆如此，览尽诸径捷要多。”

因　法：

“言十当身下，言如退位加。”

佚名的《应用碎金》

洪武四年（1371年）出版的《应用碎金》是一本数学入门书，载有不少民间常用算法，反映了元代后期的民间数学。

该书首先给出“九九数”、“尺法”、“斛法”、“秤法”、“亩法”等预备知识，然后用这些知识解决简单的应用数学问题。与《详明算法》一样，作者选材及排序都是便于初学者的。例如，作者把小九九置于书首，因为它是算术的基础。斛法只选那些常用单位，即：

量之所起曰圭（六粟也）。十圭为撮，十撮为抄，十抄为勺，十勺为合，十合为升，十升为斗，十斗为石。

---

① 孙光嗣. 授时历捷法立成序. 转引自李俨.《十三、十四世纪中国民间数学》. 北京：科学出版社，1957. 47

至于衡之单位，最小取到忽，即“十忽为丝，十丝为毫，十毫为厘，十厘为分……”，忽以下单位一概不取。

第四节　明初之数学教育与《永乐大典》中之算书

本节讲述明初（从洪武初到宣德初）的数学教育情况和《永乐大典》中所收录之数学书以及与之相关的两部分内容。

明代的数学教育不能与唐代相比，也不如北宋，但是在最初的50多年里，国家有数学教育之设立。

早在洪武二年(1369年)明朝就把数学列为教育内容之一，由广东通过上书礼部呈报给中书省批准，规定了全国性的教学内容：“钦奉圣旨，今后立学，春秋休要祭祀，设科分教礼、乐、射、书、数。”同年十一月十八日中书省杨右承（官名）等“于奉天门京板房内奏奉圣旨准教定立罪名，同这格式各处学校都镌在石碑上，钦此。”并有以下两项内容：

“一生员入学定例：凡各处府州县责任守令于民间俊秀及官员子弟选充，……已读语、孟四书者方许入学。

“一、选官分科教授：礼、律、书共为一科，……□、□、算共为一科。训导二员，掌教乐、教数、教射于知音律、能射弓弩算法者。上项训导礼、乐、射、书、数、律但是能一等或两等者，从各处守令考验各取所长，相兼教训。”

这是洪武二年立于南京奉天门的御碑[①]，各府、州、县必然按照上述学科选拔训导，教授学生。

洪武三年（1370年）八月，又规定：“京师及各行省开乡试，……中试者后十日复以五事试之，曰：骑、射、书、算、律。骑，

① 《南海县志》卷12“金石略·洪武二年御碑”。

观其驰驱便捷；射，观其中之多寡；书，通于六义；算，通于九法；律，观其决断。"[1] 这就是说在乡试考试通过之后，还要加考骑、射、书、算、律"五事"。

洪武二十五年（1392年）二月再次申明教学与考试内容，包括数学："洪武二十五年二月甲子，命学校生员，兼习射与书数之法……数习九章之法，务在精通，俟其科贡，兼考之。"[2]

当时对数学的学习内容有明确规定，在较晚的文献中有如下的追述：

"原洪武二十五年所颁数法，凡生员每日务要习学算法，必由乘、因、加、归、除、减，精通《九章》之数。昔之善教者，经义治事，贵在兼通，曾谓律令数学，切于日用，可忽而不之学乎？"[3]

洪武年的数学教育有几点特别重要，其一是规定从国家到地方各级学校都要学习数学，虽是"兼习"，不是正科，但是都要学习；其二是考试时考数学；其三是规定了教学内容，以《九章算术》为中心；其四是从下面将引用的资料中看到，国家有专门受数学教育的算学生。其中的前二项，在中国数学教育史上极为少见，因此也可以说，明初对数学教育是十分重视的。

但是好景不长，洪武二十六年（1393年）十二月发生了一个事件，涉及到书算生，可能从此在太学中砍掉了这两科学生。

事情是这样的：当时的户部尚书郁新对本部的主事夏原吉的才能很重视，于是"诸曹事悉委任焉"。有个姓刘的郎中产生忌妒，和郁新"劾诸司怠事者"，朱元璋要宽大处理。郁新表示"不可"，朱元璋怒，问是谁让这样做的，"新顿首曰：堂后书算生。帝乃下

① 《太祖实录》卷55

② 《太祖实灵》卷216

③ ［明］郭鎜．《皇明太学志》卷11．有嘉靖三十六年（1557年）郭鎜序．

书算生于狱，刘郎中遂言教上书者（夏）原吉也。帝曰：原吉能佐尚书理部事，汝欲陷之也？刘郎中与书算生皆弃市。”[①] 就这样，刘郎中和书算生都被杀了。肯定对书算生的教育培养产生极坏的后果。

30 多年以后，问题便暴露出来了，宣德初有人指出了这个问题，并请求使全国学生学习书算：

“宣德四年九月乙卯，北京国子监助教王仙言，近年生员，止记诵文学，以备科贡。其于字学算法，略不晓习。改入国监，历事诸司，字画粗拙，算数不通，何以居官莅政。乞令天下儒学生员，并习书算，……上谓行在吏部臣曰：其言皆有理，自今国子监博士助教考满称职者，必升用，生员亦会兼习书算。”[②]

宣德四年（1429 年）上至洪武二十六年才 36 年，造成生员对于书算“略不晓习”的原因，表面上看是“以备科贡”，深层次上无疑与上次书算生“弃市”有直接关系，只是王仙不能明说罢了。

从记载来看，明宣德帝朱瞻基是批准了王仙的请求。王仙还提出，地方上生员兼习书算之事，“由提调正官按察司巡案御史考试，以备因材之用”，也被采纳[③]。

此后明代数学教育如何，便无下文了。实际上，并没有得到贯彻，甚至照旧处于停止的局面。正统十五年（1450 年）监察御史朱裳说：“太祖高皇帝首立学校，令各治一经。以礼、乐、书、算分科立教”[④]。未说当时的情况。

明代的数学教育很不理想，虽然洪武时提倡学习《九章算术》，但是不仅没有重新刊印，而且连以前的印本也未完整地保存

① ［明］陈鹤.《明纪》卷 6“太祖纪六”.

② 《宣德实录》. 58

③ ［清］夏燮.《明通监》卷 20“纪二十·宣宗宣德四年”. 中华书局，1959. 840

④ 《礼部奏稿》. 载《四库全书》珍本初集本.《明史》卷 69“选举志一”.

下来一部，幸有《永乐大典》收录和孤抄本流传。

下面讲述《永乐大典》中所收录的算书及相关问题。

明朝建都于南京，1402 年燕王朱棣（1360～1424）打败朱允炆，登皇帝位，第二年改年号为永乐，改北平为北京（即今北京市），在那里设留守司、行府和国子监等机构。永乐十八年（1420 年）十一月，宣布定都北京。

永乐元年（1403 年），命解缙（1369～1415）等编纂大型类书。次年，书成，赐名《文献大成》。但永乐帝认为尚多未备，于是命姚广孝（1335～1418）等与解缙监修，参加工作的人多达 2 169 人，到永乐五年（1407 年）奏进，改赐名《永乐大典》。全书 22 877 卷，目录 60 卷，11 095 册。引录大量明初以前的各种著作，有的整本，有的按条或一部分，大体上是以每条首字及标目以下，或以一字一句分韵，或以篇名书名分韵。按韵编排。其中收入了许多数学著作，算法在翰韵，由卷 16 329 到 16 364，共有 36 卷。完整的卷目由李俨早已整理出来[1]，但由于《永乐大典》的严重散佚，算法类所存仅有 16 343 和 16 344 两卷。又在一个无作者的抄本《诸家算法及序记》中收有大量算题，严敦杰认为系来自《永乐大典》卷 16 361，“尚为全璧”[2]。合起来才有 3 卷，只占总卷数的 8.33%。

在现存的 3 卷中引录的数学书有《九章算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《五经算术》、秦九韶《数学九章》、杨辉《日用算法》、杨辉《详解（九章）算法》、杨辉《（续古）摘奇》、《丁巨算法》、《详明算法》、贾亨《（算法）全能集》、《锦囊启源》、严恭《通源算法》、《透帘细草》等 15 种。其中包括不少

---

① 李俨.《永乐大典》算书.《中算史论丛》第二集. 北京：科学出版社，1954. 47～53

② 严敦杰. 跋重新发现之《永乐大典》算书.《自然科学史研究》，1987，6（1）：1～19.

重要史料，如北宋贾宪的“增乘开方法”和“开方作法本源”被杨辉《详解九章算法》所引，《永乐大典》在收录《详解九章算法》时同时被收入书中，但是贾宪的著作失传了，而引录该内容的《详解九章算法》的相关部分有些也亦无存，幸有《永乐大典》收录的流传至今。还有如《锦囊启源》、严恭《通源算法》等数学著作，仅见于《永乐大典》。研究数学史的中国学者都把《永乐大典》所收的算书叫“《永乐大典》算书”。

编纂《永乐大典》工作，是在南京进行的，所用的书籍主要是文渊阁的藏书，用完之后便大量散佚。在文渊阁做官的杨士奇(1365～1444）提到北京的书目[①]就说明了这个问题，书目中有算法类，可是大多有目无书。目录如下：

李治《测圆海镜》一部五册，阙。

《详明算法》一部一册，阙。

又一部一册，阙。

《九章算经》一部四册，阙。

《通源算法》一部二册，完全。

《五曹算经》一部一册，阙。

《五经算术》一部一册，阙。

《孙子算经》一部一册，阙。

《夏侯阳算经》一部一册，阙。

《算学源流》一部一册，阙。

《杨辉九章》一部一册，阙。

《数学九章》一部三册，完全。

《周髀算经》一部一册，阙。

《算经补缺》一部一册，阙。

《抄录算法》一部一册，阙。

① ［明］杨士奇．文渊阁书目（卷一）．

《算法全能集》一部一册，阙。

《通变算宝》一部一册，阙。

《摘奇算法》一部一册，阙。

《捷用算法》一部一册，阙。

《算法透帘》一部一册，阙。

又一部一册，阙。

《海岛算经》一部一册，阙。

《算法百颗珠》一部一册，阙。

《益古衍段》一部三册，阙。

以上 24 部，22 种，完全者仅有 2 种，只占总种数的 9.9%强。这里有些是他处不见的书目，如《捷用算法》、《算经补缺》、《算法百颗珠》等，还有些书名不标准，如《杨辉九章》应为杨辉《详解九章算法》，《算法透帘》应即《透帘细草》，或者原书全名叫《算法透帘细草》等。另有不少很重要的书，目录中没有，如《张邱建算经》、《缉古算经》、《算学启蒙》、《四元玉鉴》，《锦囊启源》、《丁巨算法》、杨辉《日用算法》等都录人《永乐大典》，而书目中未录，显然是文渊阁没有收藏，另有来源。《算学启蒙》和《四元玉鉴》等则根本未找到，《永乐大典》自然未收。

《永乐大典》收录大量算书，在保存数学史料方面起过很大作用，令人遗憾的是《永乐大典》本身后来遭到厄运，许多史料也随之失传了。

参加《永乐大典》编纂工作的 2 000 多人中有些是精通数学的数学家，但留下姓名的只有刘仕隆一人。程大位（1533～1606）有下面的记载：

“夫难题昉于永乐四年临江刘仕隆公偕内阁诸君预修《大典》，退公之暇编成难法，附于《九章通明》之后”。

程大位把刘仕隆的难法和其他人的类似算题合在一起，放在他的

《算法统宗》的后面，分为五卷，统称为“难题”[①]，其中自然包括刘仕隆的“难法”。可是因未注明某题来于何处，所以无法分辨出刘仕隆的工作。

刘仕隆，临江（今江西清江县）人，不知生卒年。他于永乐四年（1406 年）和“内阁诸君”（大约是指文渊阁成员等）一起参加《永乐大典》的编纂。其中在数学部分的编纂工作中，他可能是主力。刘仕隆的“难法附于《九章通明》之后”，这《九章通明》即《九章通明算法》，是他的数学著作，程大位说：“永乐二十二年，临江刘仕隆作，《九章》而无乘除等法，后作难题三十三款。”

根据上述资料和情况，可知刘仕隆是在编纂《永乐大典》之后，过了 10 多年才撰成《九章通明算法》一书，其素材应是在工作时汇集和积累起来的，以后慢慢研究、消化而完成了自己的著作。程大位对该书有评价，并且吸收了其中的“难法”部分[②]，也许认为“难法”有新意，如果仔细分析、研究，可将 33 道难题分离出来。

---

① ［明］程大位.《算法统宗》卷 13. 难题附集杂法序. 不同版本，此“序”的位置可能不同.

② ［明］程大位. 算法统宗. 书末“算经源流”.

第三章 吴敬《九章算法比类大全》

本章主要讲述明代前期著名数学家吴敬及其数学著作《九章算法比类大全》，特别是该书的内容为本章的重点。

第一节 吴敬及其著作

吴敬，字信民，号主一翁，明代杭州府仁和县（今浙江杭州市）人，是当时钱塘一带远近闻名的数学家。关于吴敬的生平事迹，所见史料甚少。清代阮元以明代中算为“黑暗时代”，而不务搜求，其《畴人传》(1795～1799）所载明代算家微乎其微，无吴敬。《明史》等明代主要史书上也不见吴敬有传。



吴敬半身造像

钱宝琮《中国数学史》称：“根据《九章算法比类大全》1488 年刊本项麒序文，我们知道，吴敬担任过几次浙江布政使司的幕府，掌管全省田赋和税收的会计工作。”以后不少数学史著作，均采钱说。不过，现所见弘治元年（1488 年）奉议大夫、南京刑部郎中、仁和人项麒为吴敬算书所撰序文中仅云：“杭郡仁和之邑有良士吴氏号主一翁者，天资颖达而博通乎算数，凡吾浙藩田畴之饶衍、粮税之滋多与夫户口之浩繁，载诸版籍之间者，皆于翁手是资，则无遗而无爽焉。一时藩臬重臣皆礼遇而信托之者，有由然矣。”据此可以断定，吴敬确实曾为一些浙江地方官僚掌管过会计工作，俗称钱穀师爷，但说吴敬“担任过几次浙江布政使司的

幕府”，似乎根据不足。是否钱先生所见与现所见版本相异呢？

李俨《中算书录》上说：“明代藏书家多藏此书（《九章详注比类算法大全》），入清流传渐少。”又据李俨《明代算学书志》考证：“《九章算法比类大全》十卷，景泰庚午（1450年）钱塘吴信民（敬）作，共八本，有乘除，分九章，每章后有难题。其书章类紊乱，差讹者多。查明周述学《神道大编历宗算会》称：‘吴敬详注《九章》’，天一阁藏明刊本吴敬编《算法大全》十卷，一作八本。清初武林《清来堂书目》载有明吴敬《比类算法大全》。明赵琦美《脉望馆书目》有《九章算法比类大全》八本，又《算法大全》四本。上海东方图书馆旧藏明弘治元年（1488年）刻本八册。北大图书馆有李盛铎旧藏十二册，日本静嘉堂有一部。”[①] 由此可以看出，李俨对于各种版本的来龙去脉已经明察，即最早的版本为景泰元年（1450年）的《九章算法比类大全》。按弘治元年（1488年）项麒序称：“翁（吴敬）尝编纂其《九章算法比类大全》，通九卷，以刻于梓，以开导其后进之士，何其厚也！未几，板毁于邻烻，而十存其六焉。翁之长嗣怡庵处士，叹惜弥深，辄命其季子，名讷字仲敏而号循善者，重加编校而印之，以上继其父祖之素志。”这表明，吴敬原著为九卷本（不含卷首），版毁于火后，吴敬孙吴讷在原著基础上逐渐扩充增加了内容，但仍定名《九章详注比类算法大全》（以下均称《九章算法比类大全》）。

关于此书的写作过程吴敬自序说：“……予以草茅末学，留心算数，盖亦有年，历访《九章》全书，久之未见。一日偶获写本，其目二百四十有六，内方田、粟米、衰分，不过乘除互换，人皆易晓。若少广之截多益少，开平方圆，商功之修筑堆积，均输之远近劳费，其法颇杂。至于盈朒、方程、勾股，题问深隐，法理难明，古注混淆，布算简略，初学无所发明，由是通其述者鲜矣。

---

① 李俨．《中算史论丛》第二集．北京：科学出版社，1954．87～88

辄不自揆，采辑旧闻，分章详注，补其遗阙，芟其纰缪，粲然明白，如指诸掌。前增乘除开方起例之法，中添详注比类、歌诗之术，后续锁积演段还源之方，增千二百题。通古旧题，总千四百余问，数十万言，厘为十卷，题曰《九章详注比类算法大全》。积功十年，才克脱稿。"①

在明代，《九章算术》几乎不再流传，只有《永乐大典》才收有抄本，吴敬把他所编写的所有应用问题按照《九章》的名义分别隶属于方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈朒、方程、勾股 9 类，这样有意识地提倡古典数学，对于当时的数学研究是有一定影响的，不过吴敬的著作更加突出了商业数学的特点。

关于吴敬著作的流传情况，李约瑟在其《中国科学技术史》第三卷第十九章之六中说："他（吴敬）的《九章详注比类算法大全》早已失传。"其实不确。据调查，目前国内上海图书馆藏有此书一部；北京大学图书馆藏有明弘治元年刻本八册一部；北京图书馆藏有明景泰元年王钧刻，弘治元年吴讷重修本一部；中国科学院自然科学史研究所图书馆藏有北图影印本。

第二节　《九章算法比类大全》内容介绍

《九章算法比类大全》② 有 11 部分：首卷目录和乘除开方起例，一卷方田，二卷粟米，三卷衰分，四卷少广，五卷商功，六卷均输，七卷盈不足，八卷方程，九卷勾股，十卷开方。一卷至十卷，每卷首述"古问"，是摘自古算书的（如杨辉的《详解九章算法》等），次述"比类"，意为类推应用题，即结合当时实际的应用问题，再次为"诗词"。具体每部分内容概述如下：

---

① 《四部总录算法编》"补遗"条第 6 页．北京：商务印书馆，1957

② 本章根据《中国古代科学技术通汇・数学卷》本．郑州：河南教育出版社，1994

1. 首卷“乘除开方起例”，共194问，旨在讲解算法的基本理论，列举了大数记法、小数记法、度量衡制单位、整数四则运算、分数四则运算、定位、开方、差分等项，并用诗歌的形式一一作了解释。此外，首卷中还提出了一种“写算”法。这种写算法是以前我国数学书中从未见过的。吴敬之后的程大位在其《算法统宗》里把这种算法叫“铺地锦”。关于“铺地锦”早已为数学史界所熟悉，而它的鼻祖“写算”其实也很简单：就是先画一些方格，格的多少根据数字位数的多少来确定，选择一个方向，画上每个方格的一个对角线。计算时先将乘数竖写于方格右侧，都是每一个方格外写一个数字。每两个数字乘得的结果按十位与个位填写于对应方格对角线之上下，再按对角线斜行相加，空位不写字。如：

今有丝三千六十九两八钱四分，每两价钞二贯六百三文七分五厘，问：该钞几何？

答曰：七千九百九十三贯九十五文九分。

法曰：置丝三千六十九两八钱四分为实，以每两价钞二贯六百三文七分五厘为法乘之，合问。

这个问题实际上就是求306 984×260 375＝？即306 984×260 375＝79 930 959 000。具体计算如(图5.3.1)方格所示[①]。

这种算法，当时在欧洲、印度、阿拉伯、中亚等广大地区非常流行，因之大概系“舶来品”。

值得特别指出的是，《九章算法比类大全》首卷对乘法口诀做了一次有意义的总结。我国的九九数有悠久的历史，按《韩诗外传》的记载，在春秋时代齐国的东野人有献九九给齐桓公的故事。据19世纪末叶以来在我国西北地区陆续发现的“敦煌汉简”和“居延汉简”所记载的九九表，可以看出古代的九九数从“九九八

① 李迪. 中国数学史简编. 沈阳：辽宁人民出版社，1984. 219

十一”开始，到“二二得四”止，共 36 句，没有“一九如九”到“一一如一”的 9 句。因为这个数表从“九九八十一”开始，所以叫九九数。据李俨、杜石然两先生的考证，认为九九数扩充到“一一如一”，大约是公元 5～16 世纪间的事；九九数的顺序反转过来，改为“一一如一”开始，到“九九八十一”为止，大约是公元 12、13 世纪宋朝时代的变化①。

	3		6	9	8	4	
	/6	/	1/2	1/8	1/6	/8	2
7	1/8	/	3/6	5/4	4/8	2/4	6
9	/	/	/	/	/	/	
9	/9	/	1/8	2/7	2/4	1/2	3
3	2/1	/	4/2	6/3	5/6	2/8	7
	1/5	/	3/	4/5	4/	2/	5
	9	5	9				

图 5.3.1

南宋杨辉在《乘除通变算宝》卷中“算无定法详说”条说：“因九九错综而有合数阴阳，凡八十一句，今人求简，止念四十五句，余置不用，算家唯恐无数可致，岂得有数不用者乎？”这说明南宋的计算工作者只念到 45 句小九九，杨辉则主张念 81 句的大九九。小九九是小数同数在前、大数在后的（如“八九七十二”、“二二如四”之类），大九九除了小九九的 45 句外，还有 36 句是大数在前、小数在后的（如“九八七十二”，“八七五十六”）。明代数学著作，除王文素《新集通证古今算学宝鉴》外，其他人如徐心鲁、柯尚迁、程大位、黄龙吟等所著的算书，都只有小九九

① 李迪. 中国数学史简编. 沈阳：辽宁人民出版社，1984. 180

而无大九九，唯独只有吴敬的《九章算法比类大全》却是既记小九九，又在乘法和除法的例解中应用大九九，大、小九九皆列于书中。后来的实践证明，实际运用上，大九九比小九九好。如用小九九口诀计算时，因口诀中乘数与被乘数的顺序常常与运算的顺序不一致，所以容易搞错，但理论上45句已经合用。吴敬二者共用，就显得比他人更高明。

2.《九章算法比类大全》卷一“方田”，计214问，详述约分、合分等分数运算和各种田亩的计算。这一卷的特色在于它所涉及的田亩形状，除了《算经十书》中提到的外，还加上了梭田、箭翎田、二不等田、八不等田、钱田、船田、火塘田等稀奇古怪的象形田；与此同时，吴敬把诸田进行了分类，将可以用同一公式解决的问题放在一起。如“圭田、勾股田、半梭田，广纵相乘折半（$S_{面积}=\frac{1}{2}a$［广］$\times b$［纵］）”，又如“畹田、丘田、盆田、笊田、碗田、凹田，周径乘，四而一。”当然，需要说明的是，这些象形田的计算公式，多属近似公式，同实际面积有一些误差。而在实际丈量中，确实不可能也无需做到“精确”，模糊一点好，所以这些公式完全合于实用。据考证，近似计算的思想肇源于《九章算术》，而收罗形形色色实用象形田，然后加以近似计算则发轫于《五曹算经》。到了吴敬之时，这种“象形计算”已非常发达。《九章算法比类大全》中，就有冠以同一句目，然形状可以随题变化之田，如关于“锭腰田”就列出了十几种不同的形状。

3.《九章算法比类大全》卷二“粟米”，计212问；卷三“衰分”，计167问；卷四“少广”，计105问；卷五“商功”，计135问；卷六“均输”，计119问；卷七“盈不足”，计64问；卷八“方程”，计43问；卷九“勾股”，计101问，完全是承袭《九章算术》以来，特别是杨辉的数学成就。关于这一点，只要看一下每章的目录就一目了然了。事实上，第一卷到第九卷这一千多个

应用问题汇编，各卷的最初几个问题主要引自杨辉《详解九章算法》，也引用了刘徽《海岛算经》、王孝通《缉古算经》、朱世杰《四元玉鉴》的一些问题，称为“古问”。例如《九章算法比类大全》衰分章第一题为：“大夫、不更、簪裒、上造、公士（公、侯、伯、子、男），凡五人以爵次高下均五鹿，问各得几何?”此题与《九章算术》衰分章第一题完全相同，是吴敬从杨辉《详解九章算法》中辑出的。而吴敬书中“务中听得语吟吟”（粟米）、“人携一壶酒”（盈不足）、“一只银盘三尺周”（勾股）等问，则又与《四元玉鉴》“或问歌象”门的各该问题相当。吴敬的比类，大都也是为数学史研究者十分熟悉的。如粟米章最后一题：“九文买个桃，二文买个梨，一文六个杏，百文买百枚。”这是常见的题目。至于谈到吴敬的注释，多是转引刘徽、杨辉的，仅一小部分是吴敬的新见。

4. 《九章算法比类大全》卷十“各色开方”，共94问，专论开平方、开立方，以及开高次方，开带从平方与开带从立方。吴敬开立方与求其他高次方的正根法，不用增乘开方法而用立成释锁法（增乘开方法和立成释锁法是宋代贾宪创立的两种开方法）。立成释锁直接来源于《九章算术》，可以说和《九章算术》的开方法本质上一样。而增乘开方法则比《九章》开方法简捷，有创造性，在中国乃至世界数学史上都享有很高声誉。然而，明朝一代数学家大都不了解增乘开方法的优越性，他们只能利用“开方作法本源”图（二项式展开系数表），仿照《九章算术》开方术、开立方术，求出高次方的正根。很明显，这相对宋元是一种倒退。但是，需要重申的是，明代在“色数学”方面达到了登峰造极的地步，尤其在吴敬书中，颜色被应用得维妙维肖，使开方运算眉清目秀。所谓“色数学”，就是在数学（特别是几何）中大量应用颜色来增加直观性和区别几何图形，即把看起来风马牛不相及的颜色和数学有机地结合起来。这种“色数学”对后来地图测绘影响

不小，很有发展前景，因为它比起高度抽象的现代数学来，更容易为世人接受，因而在数学教育中，“英雄本色”犹存①。

第三节　对《九章算法比类大全》的评价

对《九章算法比类大全》的低估最先来自明代的程大位。程大位在《算法统宗》“算经源流”条中批评吴书：“其书章类繁乱，差讹者亦多。”虽然程大位没有具体指出吴书的差讹，笼统指谪，但却深深影响了后人对《九章算法比类大全》的评价。如清代李长茂在《算海说详》中照抄《算法统宗》对吴书的评语。黄钟骏在《畴人传四编》“吴信民”条指出：“其书繁而难记，差讹颇多。”当今中算史研究中，对吴敬的评价也不及程大位。

认为吴敬水平在程大位之上的第一人是清代梅文鼎。他在《勿庵历算书目》“九数存古十卷”中说：“其钱塘吴信民《九章比类》，西域伍尔章遵韬有其书，余从借读焉。书可盈尺，在《统宗》之前，《统宗》不能及也”。现代钱宝琮则率先在《浙江畴人著述记》上说：“明代在西学输入以前，数学著作之可称著厥唯珠算术一门。而景泰元年（1450 年）仁和吴敬所撰《九章算法比类大全》十卷，尤为其中翘楚（出类拔萃）。”②

事实上，如第二节所述，吴敬的工作旨在继承传统。他在序中认为，一切适合当时社会生活的应用问题都是《九章算术》问题的演变。于是在他的著作中只对数字计算程序有所改变，对解题方法则原则上力求循古。由于《九章算法比类大全》与社会经济生活紧密相联，因此它是研究明代商业数学、明代经济和明代数学社会史的极好资料。书中关于商业的算题很多，包括合伙经

① 劳汉生.《算法大全》《古今算学宝鉴》初探.《文献》，1987（3）

② 浙江《文澜学报》第三卷，第 1 期.

营、商品交换等等，计有“买线失羽”、“三人税钱”、“经营得利”等等名目，反映出明代商业的繁荣。不仅如此，吴敬在继承传统的同时，也有一些创意。这部分主要集中反映在《九章算法比类大全》首卷中。

另外一个问题，是关于吴敬书中用没用珠算。如果有著录珠算，那吴敬在珠算方面的创设就非同一般了。李俨在《中国数学大纲》上说：“吴敬全书以筹算举例”，即否认吴敬书中用了珠算。但华印椿《中国珠算史稿》却认为：吴书的开平方和开多次方，用上下层布数列式运算，应是筹算；而乘除只列实数一行，不列法数，不用筹算传统的“三重张位”，应是珠算。他以为，“李俨之所以认为是筹算，大约是由于吴书的算式，在汉文数字下面标注着筹码，这不能作为筹算的证据。”[①] 因为筹码是暗码的前身，在古代没有用暗码记数之前，是用筹码记数的。如在敦煌石室发现的唐代《立成算经》中的“九九数”[②]，在汉文数字右边，都用筹码标出。这证明唐代已用筹码作书写记数之用。严敦杰在“阿拉伯数码传到中国来的历史”一文中说：“我国很早也产生算码，约公元9世纪的敦煌石室算书内已有算码，到13世纪时，算码使用更为广泛，并且这种算码书写也很方便，和阿拉伯数码字相比，在效用上几乎相同，故一直到现在还有用本国算码的”[③]。清代数学家华蘅芳也说：“尝见先辈数学家，其演算之稿每作草字而算式则用市俗号码。”严敦杰认为，这里说的市俗号码即我国的算码。根据上述材料，华印椿认定：古算书中的算式用筹码记数的有两种情况：一种是表示筹算，另一种只作一般记数，如同用暗码记数一样。所以古算书中的乘除算式，如果只用筹码记数，而没有筹

① 华印椿．中国珠算史稿．北京：中国财政经济出版社，1987．69～70

② 李俨．中国古代数学史料．上海：中国科学图书仪器公司，1954．37～39

③ 严敦杰．初等数学史．北京：科学技术出版社，1960．67

算特有的“三重张位”或简化的“二重张位”的方式，就难于证明是筹算。在《九章算法比类大全》中，多位乘法算式只列实数；除法不论归除或商除，算式也只列实数，商数列在实数的同一行。这与筹算的三重张位不同，所以应是珠算。

如果承认吴敬用了珠算，那至少在以下几方面《九章算法比类大全》是不容忽视的：

1. “先十法”。日本珠算界称为“先珠法”或“先玉法”。这是对珠算加减创造的一种方法：凡加算在加两位数，预见个位须满十进位时，在十位多加10，同时在个位减去加数个位的补数。例如：23＋18，按照23＋20－2进行运算。减算在减两位数，预见个位不够减，要从十位退1时，在十位多减10，同时在个位加还减数个位的补数。例如：42－28，按照42－30＋2进行运算。加算减算采用“先十法”，可以减少拨珠次数，提高计算速度，是一种先进的计算方法，由吴敬在乘除例题解法中提出。

2. 商除法。《九章算法比类大全》在叙述“归法”（一位除法）、“归除”（多位除法）和“减法”（定身除）3种除法之后，提出了商除法。首先列商除歌诀，其次举例题和算式，阐述运算方法。

商除歌：

“数中有术号商除，商总分排两位居。

唯有开方须用此，续商不尽命其余。”

例：今有钞八十贯七百一十二文，买物二百三十六斤。问：一斤价几何？

答曰：三百四十二文。

法曰：置所有钱八十贯七百一十二文为实，以所买物二百三十六斤为法，商除之。定位之法，与归除同。

原文例解：

二文＝　二六除一十二　除存一十，更除次位二文，尽。

一十｜　二三除如六　于第三位作七十内除六十，余存一十。

七百⊥　二二除如四　除存四百，却于前位下二文。

四六除二十四　于存七百内除三百，存四百，却于次位一十上加六十，作七十。

三四除一十二　除存一贯，更于次位九百内除二百，余存七百。

二四除如八　将作九贯内除八贯，存一贯。于前位下四十。

三六除一十八　除存一十，于次位一贯加八作九贯，第三位七百加二作九百。

三三除如九　将存二十内除一十，余存一十，却于次位下一贯。

八十贯|||　二三除如六　于实前位合依定位下三百，却将本身八十内除六十，余存二十。

今解：

一二三四五六

8 0 7 1 2

+3 ………………………………………… (1) 立初商 3

　−6 ………………………………………… (2) 二三除如六

　　−9 ………………………………………… (3) 三三除如九

　　−18 ……………………………………… (4) 三六除一十八

3　09912

　　−8 ………………………………………… (1) 二四除如八

+4 ……………………………………………… (2) 立次商 4

　　−12 ……………………………………… (3) 三四除一十二

　　　−24 …………………………………… (4) 四六除二十四

3　40472

　　　　−4 …………………………………… (1) 二二除如四

　　　+2 ……………………………………… (2) 立三商 2

　　　　　−6 ……………………………… (3) 二三除如六

　　　　　　−12 ………………………… (4) 二六除一十二

342

吴敬的商除式只布实数，不列法数。上题所求商数 342 三位，运算时，都是实大于法，按照原书所说，"定位之法，与归除同"，立商应在实首或余实首位的前一位，位置同归除一样，比现代商除的立商档位右移一位。这种立商档位的商除法，今称"商归法"，是吴敬首创。

3. 归除法。首先将筹算归除法搬上算盘的，也是吴敬。《九章算法比类大全》在除法部分，先举九归歌和撞归法两种歌诀，次讲述归法（一位除法）和归除（多位除法）两种算法。

例：今有钞二千五十二贯，每米一石价四贯五百文。问：该米几何？

答曰：四百五十六石。

原文例解：

原　式

五六除三十　将存三贯除尽。

二贯‖　见四进一十　将存七贯除四贯，止存三贯，却进前位五上加一石作六石。

四二添为五　将存二十添三作五。

五十≡　五五除二十五　将本身五十除三十，止存二十，却于次位二贯上加五为七贯。

四二添作五　将存二十添三改作五十。

五四除二十　将下四十内除二十，止存二十。

无除下还四　将作五百除一百，止存四百，却于次位下四十。

二千‖　四二添为五　将本身二千添三为五，合依定位改作五百石。

今　解

2 0 5 2

五四除二十
无除下还四
四二添为五

4 2 5 2

五五除二十五
四二添为五

4 5 2 7

五六除三十
见四进一十
四二添为五

4 5 6

（上题求次商 5 时，乘减所用“五五除二十五”，是用“先十法”运算）

4. 乘除定位法。古今珠算的乘除定位法，方法繁多，但大体上可分为“盘上定位”、“公式定位”、“掌中定位”三大类。其中盘上定位、掌中定位由吴敬首创。

《九章算法比类大全》中的乘法采用留头乘。它的积数定位法

是：在实数单位的次位定为法首位。例如：

今有丝二百九十三斤，每斤价钞二十七贯五百文。问：该钞几何？

答曰：八千五十七贯五百文。

法曰：置所有丝二百九十三斤为实，以所求价二十七贯五百文为法相乘。定位：法首是十贯，合于斤上定百贯。

			（定百贯）	（法首十贯）次位		
	二百	九十	三斤			
	𝍡	𝍨	𝍢			
得数		捌	○	伍	柒	伍

归除定位：

从法首之数，以定其实。（具体办法是：在实首前的前一位作法首位，向前逐位数到法数个位，即把这位作为实首位；向后〔右〕倒数到实个位，定这一位为商数的个位。）

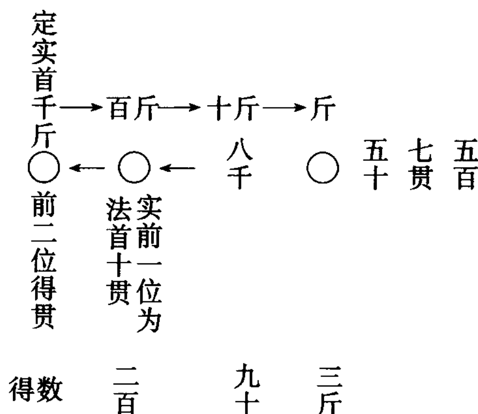
例如：

今有钞八千五十七贯五百文，每丝一斤价钞二十七贯五百文。问：该丝几何？

答曰：二百九十三斤。

法曰：置所有钞八千五十七贯五百文为实，以所求价二十七贯五百文为法，除之。

定位：实首千贯，从实前一位数作法十贯，前第二位得贯，就从这一位数作实首千斤，向右倒数一位得百斤，再向右一位即实首得十斤，再向右一位（即空位上）定斤，共得二百九十三斤。



掌中定位法在左手的食指、中指、无名指和小指上，用地支“子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥”12个字代表位数，用来推算积商的首位是什么数位。12个字在四指中的位置如图示(图5.3.2)。12个字的数法有顺数和逆数的区别：从子丑寅向卯辰巳午……戌亥数（即顺时针数），叫顺数，数位由大到小。另一种从亥戌酉向申未……卯寅数，叫逆数，数位由小到大。此图后为程大位《算法统宗》采录，改名定位掌。



图 5.3.2

最后，需要说明的是，《九章算法比类大全》成书后28年，即1478年，在意大利威尼斯附近的特雷维沙(Treviso)出版了意大利第一本印刷本算术书。这本被称为“特雷维沙算

术”的书与《九章算法比类大全》中有许多算法、名称都非常相似[①]，说明当时东西方数学的社会背景和商业数学内容的一致性。但在意大利，随着商业数学的迅猛发展，数学理论一日千里。1494年帕奇欧里出版了有关概率论问题的教材，至于达·芬奇、罗拉莫·卡当（1501～1576）等人的名字和成就，更为举世瞩目。这一切都是当时中国数学望尘莫及的。分析当时西方数学高度发展的原因，和资本主义的兴起是分不开的。例如，随着商业贸易日益发展，航海事业日新月异，14世纪出现了海上保险事业。到16世纪时，人寿保险及水灾、火灾等保险事业也相继出现，它们都向数学提出了新的要求，需要应用数学来分析和研究偶然现象中蕴涵的规律，估计事故发生的可能性有多大。这便促进了概率论的诞生。相比之下，中国当时的商贸虽也很繁荣，但仍然逊色。我们知道，举世闻名的郑和下西洋，主要是政治目的，而非商业经济目的。

① 钱宝琮.《中国数学史》. 北京：科学出版社，1964. 134

第六编

珠算的普及与对明代数学的评价

本编主要讨论吴敬《九章算法比类大全》以后所出现的珠算著作，并以王文素的《古今算学宝鉴》和程大位的《算法统宗》为主展开论述。最后对明代数学给出评价和中外交流的探讨。实际带有对中国传统数学一次小结的性质。

第一章 王文素及其数学著作

王文素是明代中期人，他的数学著作《算学宝鉴》是一部很重要的珠算书，但因其只有抄本，没有刊印，致使后人知者甚少。因此，在本章对该书进行详细论述。

第一节 王文素事迹和《算学宝鉴》版本及内容简介

王文素，字尚彬，原籍山西汾州。成化年间（1465～1487）随其父经商到河北省真定的饶阳（饶川），遂定居于那里。王文素从小聪慧好学，人称“书史诸子百家无不知者”，尤其擅长算学。及成人，潜心钻研诸家算法，30余年如一日，终于在近60岁时完成42卷巨著——《古今算学宝鉴》。据正德八年（1513年）武邑庠

生宝朝珍为《算学宝鉴》所作序文，得知王文素及其同乡善算者，曾因公大会于清河。当时，同行聚首，各抒己见，各申所长，然惟王文素独占鳌头，才冠群首，被饶阳算学前辈杜瑾（字良玉）誉为“数算中纯粹而精者”，谓“吾辈之弗如也”。大约在清河大会后不久，王文素弃商从教，并将平日所改正的、有研究的算书，编写整理成 10 帙，30 余卷，这就是《通证古今算学宝鉴》稿本。王文素将此书呈杜良玉审阅，杜良玉审阅后倍加赏识，称：

“窃见宋杨辉及我朝金陵杜文高、江宁夏源泽、金台金来朋等诸公算法固谓善矣，但头藏尾露、尾藏头露，俱以逢巧之法算之，不通活变，以致后学难悟。今公以通玄活变之术，断成诗歌讲义，诚可变而通之，使民宜之者乎。”杜良玉爱才心切，竭力赞助王文素刊出《通证古今算学宝鉴》。于是此书 1513 年问世。但由于受财力所限，印数极少。约

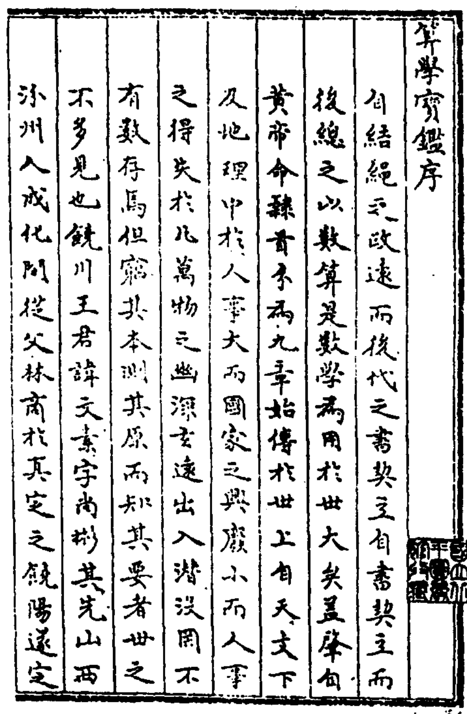

算學寶鑑序
自結繩之政遠而後代之書契立自書契立而
後總之以數算是數學為用於世大矣蓋肇自
黃帝命隸首予為九章始傳於世上自天文下
及地理中於人事大而國家之興廢小而人事
之得失於凡萬物之幽深玄遠出入潛沒罔不
有數存焉但窮其本測其原而知其要者世之
不多見也饒川王君諱文素字尚彬其先山西
汾州人成化間從父林商於真定之饒陽遂定

图 6.1.1　《算学宝鉴·序》书影

10 年后，王文素又韵诗 300 余问，分为 12 卷，续在《通证古今算学宝鉴》之后，命重修本为《新集通证古今算学宝鉴》，这是嘉靖

元年（1522 年）的事。嘉靖三年（1524 年）经人赞助，《新集通证古今算学宝鉴》抄本流传。

李俨[①]、华印椿[②]认为无刊本流传，似不准确。

王文素具体生卒年代不详，不过据《新集通证古今算学宝鉴》“序”（如图 6.1.1）和王文素《集算诗》可以断定，王文素的活动年代大约在公元 1465 年至 1550 年之间。

此外，王文素在“身前乘”歌中说：“此法世人知有几”；还说“多会算等工，但知身后乘，而不知身前乘”。由此可知，当时华北如山西、河北等地在珠算应用中并不知身前乘法而只知身后乘法。王文素率先将“身前加”、“身前乘”搬上算盘，但由于《新集通证古今算学宝鉴》流传不广，400 多年各地藏书家没有收藏此书，王文素关于珠算乘除开方研究，以及众多方面的成就，长期被埋没，王氏算法在明、清没有产生多大影响。直到 1934 年左右，北京图书馆于旧书店发现《新集通证古今算学宝鉴》抄本，才以善本珍藏，至今可能为海内孤本。

《算学宝鉴》版本

李俨《明代算学书志》称：“《算学宝鉴》三十卷，明王文素（1524 年）撰，现存。北京图书馆藏有蓝格抄本《算学宝鉴》六册。”在丁福保、周云青编《四部总目算法编》中又收有李俨说：“《新集通证古今算学宝鉴》四十一卷，蓝格抄本六册，明王文素撰。”又云：“明王文素撰《新集通证古今算学宝鉴》，亦简称《算学宝鉴》。最近由北京图书馆于旧肆中发现。此书 400 年各收藏家及公私书目，未经著录。自序成于明嘉靖三年（公元 1524 年），比吴敬《九章详注比类算法大全》（公元 1450 年）为迟。据其自序、卷

① 李俨. 中算书录.《四部总目算法编》. 商务印书馆，1957

② 华印椿.《中国珠算史稿》. 北京：中国财政经济出版社，1987. 176

首之集算诗及宝朝珍序文，知此书之成，时经30年，王文素年已六旬，无力付刻，吉武杜瑾虽愿出资刊刻，而实现与否，尚无证明，是以流传甚少。此书采集宋杨辉、明金陵杜文高、江宁夏源泽（公元1439年）、金台金来朋诸家算法，加以编订。其画十六等图，即出于杨辉，而所称杜、夏、金三家著书名，尚未获知杜、金二家，只夏源泽一人可考。据其目录，全书共分子至亥等十二本（今订成六册），共四十一卷（自序作四十二卷）。"[①] 查华印椿《中国珠算史稿》有类似说法。

这里出来一个问题，李俨《明代算学书志》与《中算书录》中谈论的是不是同一部书？若是，为何一曰三十卷，一曰四十一卷？

笔者第一次在北京图书馆所见《新集通证古今算学宝鉴》是1985年，当远在李俨之后。笔者见《新集通证古今算学宝鉴》41卷，首一卷，共42卷，真真切切，而非"自序作四十二卷"。抄本12册，而非6册。题汾阳王文素述于饶川西城之馆（也题汾阳王文素寓饶川述编），有1513年宝朝珍序和1524年王文素自序。从李俨的介绍看，似李俨与笔者所见本相异。宝朝珍序："先生又出平日所改正数书十帙，今为三十余卷，名曰《通证古今算学宝鉴》"，即1513年版为10帙，30余卷。又1524年王文素自序说：……凡二百条，三百十七诀，千二百六十七问，分为四十二卷，号《通证古今算学宝鉴》。于嘉靖改元训蒙西城，暇中又韵诗三百余问，分十二卷，续于后。由此看来，《算学宝鉴》当有30卷本和42卷本之分。

1988年，笔者再次到北图造访，详查善本目录，确实只记《新集通证古今算学宝鉴》为孤本。经仔细探访，方知系工作人员将购入时的6册按原书序、集算诗等指示还原为12册。但是42卷无误，内容完整，抄写工整、清楚。

---

① 李俨．中算书录．载《四部总录算法编》．商务印书馆，1957．补遗50

《算学宝鉴》内容介绍

王文素自序云：留心算学，手不释卷三十余年，颇谙乘除之路。尝取诸家算书读之，其辞失意者有之，问答不合者有之，歌诀包束不尽，定数不明，舍本逐末，弃源攻流，乘机就巧，法理不通，学者莫可适从，正犹迷人而指迷人也。又兼版简模糊，撰书舛误……我朝景泰间，金台金来朋，有志改正，才论数题，即有二病，不足称也。遇故不揣鄙陋，敢以醯鸡井蛙之见，历将诸籍所载题术，逐一探远细论，研推其所当者述之，误者改之，繁者删之，阙者补之，乱者理之，断者续之。复增乘除图草定位式样开方演段捷径成术，编为歌诀，言以俗解。

这段文字表明了王文素著书之目的：道出了《古今算学宝鉴》独特的风格：(1) 内容丰富，结构完整，各类问题皆并收之。(2) 写作严肃，论证严谨，虽洋洋 42 卷，收录上千题例，却非滥竽充数，凡荒诞及误差过大之算法均不列书中。(3) 深入浅出，便于阅读，无哗众取宠之意，是一部难得的好教材。(4) 遍采众家，去粗存精，对前人算书之误一一更正。就其章目：第一卷：大小数，度量衡亩分，乘除起例，盘中定位等；第二卷：掌中定位，悬空定位；第三卷：乘除；第四卷：乘除捷法；第五卷：代乘代除；第六卷：乘除通变；第七卷：诸田求积；第八卷：平圆，弧田求积；第九卷：积田求里；第十卷：求田捷径；第十一卷：粟米；第十二卷：分数；第十三卷：衰分；第十四卷：贵贱分身；第十五卷：少广；第十六卷：平方、带纵平方；第十七卷：圭田、梯田求长阔；第十八卷：棱田、圭田、勾股田、梯田截积；第十九卷：商功；第二十卷：盘仓窖、草垛、立圆求积；第二十一卷：堆垛、算箭；第二十二卷：均输；第二十三卷：差分；第二十四卷：就物抽分等；第二十五卷：盈不足；第二十六卷：方程；第二十七卷：众率分身；第二十八卷：勾股；第二十九卷：勾股容方容圆

等；第三十卷：测量；第三十一卷：平圆开积、环田求周径、截积；第三十二卷：求圆径；第三十三卷：共积开平方；第三十四卷：和乘长阔；第三十五卷：开立方、开立方带纵；第三十六卷：开修筑积；第三十七卷：立方截积；第三十八卷：开三乘以上方；第三十九卷：三乘以上带纵；第四十卷：乘积开立方；第四十一卷：约面开方。

《算学宝鉴》的内容可分为 3 类：

1. 前人著作的摘录、校改。这一部分所占比例相当大，主要搜集了杨辉、贾亨、安止斋、吴敬、夏源泽、许荣、金来朋等人算书中的题目。如（卷三）“假有罗四匹零一丈七尺，每匹价银四两八钱，且云匹法四十尺。问：该银几何？”又（卷四）“银一十七两八钱，每两买豆三石四斗一升。问：该豆几何？”等等。这类题目大都布算简单，屡见于各类算书之中。所不同的是王文素的著作虽仍采用传统数学“题、答、法、草”问题集形式，但在题目之前都赋有述理诗。如“互借求原”诗：“互借求原仔细评，论来亦可用方程。九章巧遇非通理，布位如前等级同。”例：“甲乙二人沽酒，不知谁少谁多，乙钱少半甲，相和二百，无零皆可，乙得甲钱中半亦然二百，问：甲、乙钱？答曰：甲一百六十文，乙一百二十文。”

2. 比类，即仿照常见题目重新造题。如“方石类锥一个，底方六尺，第二层方四尺，第三层方四尺，第四层方二尺，第五层方三尺，顶高一丈八尺。问：积几何？”等等就属比类。比类思想宋代相当流行，至明而不衰。王文素的比类，显然直接受杨辉、吴敬影响。至于上面所举例子，实际上是《九章算术》商功章的问题经过不断比类而成。

3. 王文素的见解和评述。这部分内容散见于各卷之中。如“弧田一段，弦十四步，矢七步。问：为田几何？”关于弧田面积，

《九章算术》用公式$S=\frac{1}{2}$（弦×矢+矢^2）计算。刘徽注《九章》已知此公式有误差，但未给出精确公式。刘徽以后，诸家算书多以九章旧术或“$S=\frac{1}{2}$×弦×矢”入算。显然以“$S=\frac{1}{2}$弦×矢”入算，误差更大。王文素深感曲边形面积公式误差太大，遂创新法。就上例，王文素认为“依古法答曰七十三步半（$S=\frac{1}{2}$〔$14\times7+7^2$〕$=73.5$）。”他用出入相补法解释，“弧矢相乘得直田积九十八步，依古法两角余积二十四步半”，然实际两角余积二十一步，因而以新法计算弧田面积当为七十七步。即以$S=\frac{1}{2}$（弦×矢+矢^2）计算常嫌小。当然，王文素的“新法”也是近似的，但用它去求牛角田、眉田等曲边形面积却大大提高了精度。王文素对出入相补原理倍加推崇，常用此原理解决几何难题，反映出他逻辑的清晰性与精密性。《算学宝鉴》中王文素的许多见解都是值得称道的。顺便说，王文素对长久以来不少算书无视徽率、祖率而取“周三径一”大为不满。他在演算中常用祖氏密率355/113，或约率22/7，或用25/8。

王文素对南宋《杨辉算法》有较深的研究，他在《新集通证古今算学宝鉴》中采入《杨辉算书》的部分，都有所发展和改进。例如：（1）将“身前因”改进为“身前乘”。杨辉《算法通变本末》卷上的“身前因”，乘数为21～91两位数，法尾限于1。王文素打破这个局限，任何乘数只要法尾减1，都适用“身前乘”计算，因而扩大“身前乘”的范围。（2）发展了“归总还零”除法。杨辉《法算取用本末》中“归减代除三百题”，有一题除数为97，用“从上位隔位见一加三，遇九七成百”计算，王文素由于此题计算法的启示，凡略小于100的除数（如91～99）都用这种方法运算，定名为“归总还零”，即近代珠算法的“补数减除法”。（3）创造了“众九相乘”、“众九为乘”、“实位相同”（即今之“跟踪乘”）、

“截法实乘”等新法。（4）乘除定位为珠算的重点，王文素采用“盘中定数”、“掌中定数”和“悬空定位”三种方法，不拘一格，可以互相核对。（5）王文素对开平方、开立方沿用筹算法，但对少广的传统方法，也有所改进。

4. 王文素关于珠算的记述。《算学宝鉴》同吴敬《九章算法比类大全》一样，著录了珠算加减法的“作五诀”、“成十诀”、“破五诀”、“破十诀”，虽然没有明言珠算，但乘除用“盘中定位数”（卷一）。另外，“众九相乘”条（卷五）说：众九相乘，用子甚多，算盘子少，乘则不便，既已乘毕，只动一子居下，余仍如故，……法实俱各二位者，只于实尾起一子，挪于尾后第二位，即得答数。这里明白指出计算工具是算盘。关于乘除的布数方式，此书卷一“认法实”条说：……将实列于左上，法列于右下，法实相呼，变实为积是也。凡人分物者，皆以物为实，人为法除之。这同程大位《算法统宗》中“用字凡例”条中“上下”二字的解释（上：脊梁之上，又位之左。下：脊梁之下，又位之右。）和“初学盘式”条的“实在盘左，法在盘右”的布数方式完全一致。因为算盘的位置，“左上”即指算盘的左面，“右下”指算盘的右面。所以《算学宝鉴》的乘除算肯定是珠算。实际上，《新集通证古今算学宝鉴》在珠算书中是水平最高的，这从下面所论不难看出。

第二节　王文素的珠算乘法、归除与飞归

一、珠算乘法

乘法的基础是九九口诀，明代的珠算家如徐心鲁、柯尚迁、程大位、黄龙吟等，以及清代各家的珠算书，都只记录从“九九八十一”开始到“二二得四”止45句小九九。小九九是小数和同数

在前，大数在后（如八九七十二、三七二十一、二二如四之类）。大九九除了小九九的 45 句外，还有 36 句是大数在前、小数在后的（如“九八七十二”、“八七五十六”等）。王文素《新集通证古今算学宝鉴》子本第一卷第七节“九九合数”中，不用社会上流传的小九九而用大九九，完全同意杨辉采用大九九的主张。杨辉在《乘除通变算宝》“算无定法详说”条中说：因九九错综而有合数阴阳，凡八十一句，今人求简，止念四十五句，余置不用，算家唯恐无数可致，岂得有数不用者乎？王文素照录全部大九九口诀（如表 6.1.1），说明他的远见超越了程大位等明代算家。

表 6.1.1　大九九口诀表

乘数 / 被乘数	一	二	三	四	五	六	七	八	九
一	一一 01	二一 02	三一 03	四一 04	五一 05	六一 06	七一 07	八一 08	九一 09
二	一二 02	二二 04	三二 06	四二 08	五二 10	六二 12	七二 14	八二 16	九二 18
三	一三 03	二三 06	三三 09	四三 12	五三 15	六三 18	七三 21	八三 24	九三 27
四	一四 04	二四 08	三四 12	四四 16	五四 20	六四 24	七四 28	八四 32	九四 36
五	一五 05	二五 10	三五 15	四五 20	五五 25	六五 30	七五 35	八五 40	九五 45
六	一六 06	二六 12	三六 18	四六 24	五六 30	六六 36	七六 42	八六 48	九六 54
七	一七 07	二七 14	三七 21	四七 28	五七 35	六七 42	七七 49	八七 56	九七 63
八	一八 08	二八 16	三八 24	四八 32	五八 40	六八 48	七八 56	八八 64	九八 72
九	一九 09	二九 18	三九 27	四九 36	五九 45	六九 54	七九 63	八九 72	九九 81

（逆九九）

（顺九九）

珠算乘法，分为前乘法（上乘）和后乘法（下乘）两类。前乘法的运算，先由实首乘以法数各位（一般由法首乘起），部分积放在实数本身的前面（左边），再依次由实首以后各位乘以法数各

位，直到实尾同法数乘完为止。因为运算从实数的前面乘起，部分积又放在实数前面，所以又名“身前乘”，今名“前乘法”。后乘法的运算，先由实尾乘以法数各位，部分积放在实数本身后面（右边），再依次由实尾以前各位乘以法数各位，直到实首同法数乘完为止。因为运算从实尾乘起，部分积又放在实数后面，所以又名“身后乘”，今名“后乘法”。

明代珠算流行后乘法的“留头乘”。但《新集通证古今算学宝鉴》著录的后乘法却不止留头乘，还有掉尾乘和破头乘二种。原书子本“乘法二十四”的原文如下：

留头乘法要知问，法位先将第二因。

三四五来乘遍了，才乘法首变其身。

解曰：法有二位以上皆曰乘，生数之术也。其法有三：有自法尾乘起而至上者；有自法首乘起而至下者；有自第二位乘起至尾才来乘法首而变身者，此谓留头乘法也。

文中所说的“有自法尾乘起而至上者”，即掉尾乘；“有自法首乘起而至下者”，即破头乘。当时这两种乘法可能还没有专名，书中也没有举例题指出具体运算的方法。

筹算的传统乘法是前乘法，后来才发展成后乘法，到了元代，多位乘法完全用后乘，不用前乘。明、清两代的珠算书，除王文素《新集通证古今算学宝鉴》外，也都只著述后乘法，不用前乘。

《新集通证古今算学宝鉴》对各种乘法进行了广泛的探讨，除继承杨辉的《算学通变本末》中的“身前因”外，还发展了“身前乘”。

杨辉的“身前因”，凡有效数二位的法数，其末位为1时，1省却不乘，只从实数前面起加“法首同实数相乘之积”。例如234×31，求234的31倍，等于234本身加234的30倍。运算方法，从实数234的首位起加乘它的30倍，每位乘得的积，个位加在本身的前一位，十位加在前二位。

```
               2 3 4 ⎫
①3×2……6              ⎪
②3×3……      9        ⎬+
③3×4……      1 2      ⎭
             7 2 5 4
```

杨辉的“身前因”，法数限于有效数二位、末位为1的，用身前乘一位计算。王文素的“身前加”，扩展法数的有效数为三位，第三位为1的，用身前乘二位计算。又王文素发展的“身前乘”，任何法数（末位不限于1），只要末位减1，都可用身前乘计算。

《新集通证古今算学宝鉴》著录的“身前加”和“身前乘”的两法如下。

身前加：乘法梢头有一存，身前加总妙通神。

口呼如字挨身下，言十须知隔位乘。

解曰：乘法有一居前者，则用身后加零，有一居后者，则用身前加总：呼“如”挨身下，呼“十”隔位下数……

银一十七两八钱，每两买豆三石四斗一升，问：该豆几何？

法曰：置银一十七两八钱，身前加四三。身前加二位法图（如图6.1.2）。

身前乘：身前乘法从头起，法尾减除一数已。靠尾先乘直到头，末后才来乘法尾。呼如对位十升前，反列法实尤易理。不变实身最好乘，此法世人知有几。

解曰：多会算等工，但知身后乘，而不知身前乘。其术，实当列于右，法当列于左，即法尾先减一数，从实前乘起，言“如”对，言“十”过身。先乘靠尾之位，到头才乘法尾。是一者不去，用身前加之。……

今有银一十二两五钱，每两折收钱六百九十文，该钱几何？

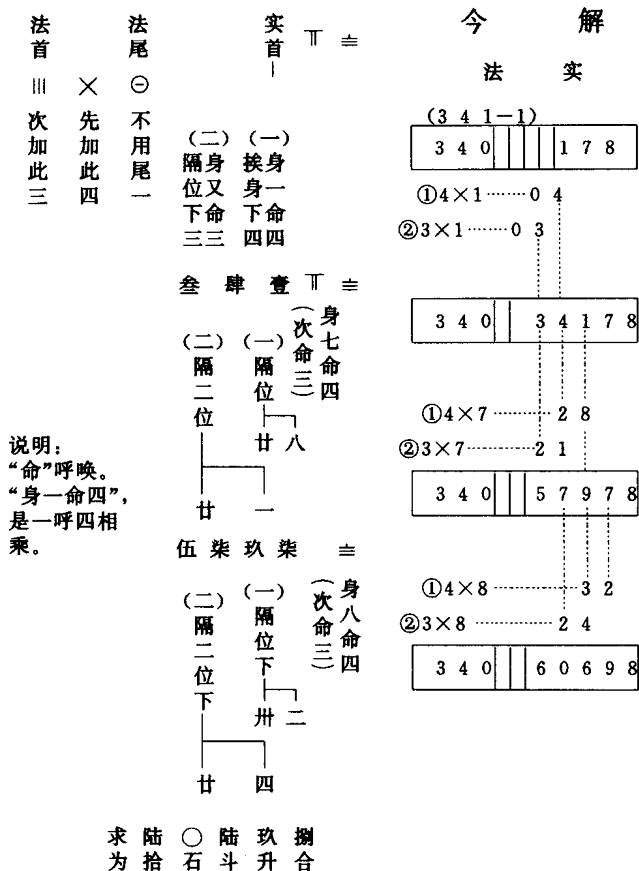
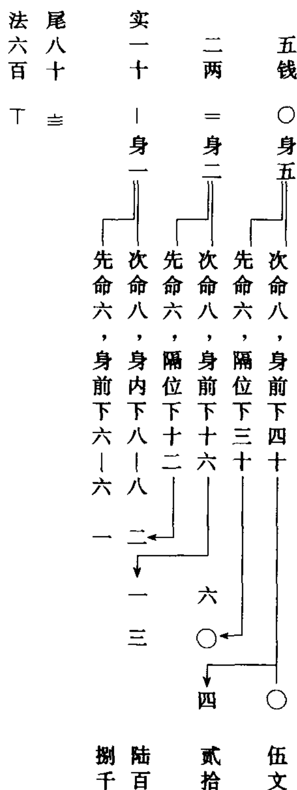


图 6.1.2　身前加例图

法曰：置总银于右下为实，以每两折钱于左上为法，于法尾去一乘之，合问。身前乘二位法图（如图 6.1.3）。

“身前乘”是把法尾减 1 后乘加，是“身前加”的扩充。法尾减 1 后，任何法数都可用身前乘计算。这种乘法，现在叫“减一前乘法”。其实“身前加”也是“身前乘”，不必另列一法。

身前乘二位图(原图)



今解　12.5×690

(69−1)

1. | 6 8 | | | 1 2 5 |

6×1……6

8×1……8

2. | 6 8 | | | 6 9 2 5 |

6×2……1 2

8×2……1 6

3. | 6 8 | | | 8 2 8 5 |

6×5……3 0

8×5……4 0

4. | 6 8 | | | 8 6 2 5 |

图 6.1.3　身前乘例图

王文素“身前乘”的运算，把法尾减一后，列在算盘左边，向右空几位列出实数。先从实首乘起。实首先乘靠法尾的一位（即法尾前一位），到尽头才乘法尾。实首乘过法数各位后，再依次由实数的次位、三位等乘以法数。

从以上王文素前乘法二例的运算中，可看出“身前乘”的运算顺序同“身前加”的运算顺序不一致。身前加（如上例：178×

341）的运算，实数每位先乘法尾，后乘法尾前一位；身前乘（如上例：125×960）的每位实数先乘法尾前一位，后乘法尾。按照传统的上乘法，实数各位应从法首乘起，依次乘到法尾，这样相乘，拨珠才顺手。王文素在珠算乘法上的确比明朝一代其他数学家更高一筹。其优越性 400 多年后才为中算史和珠算史界认识。

二、王文素的归除法

王文素在《新集通证古今算学宝鉴》中阐述的归除法，所用九归歌和撞归歌，与吴敬基本一致。但王文素对归除定商方法较有研究。

王文素云：归除者，先以法首归实而求其身，次以身命后位而除其实……求身之要有四：一曰满归满除，进位为身者是也。二曰满归不满除，乃用撞归者是也。三曰归讫无除，起一还原数者是也。四曰归讫有余，进入其身者是也。

王文素对归除 4 种求商方法均有例题加以说明。

1. 满归满除进位为身——即够归够除，用“逢几进几”归诀一次定商的归除。例如：

768÷2.4=320

口诀：逢六进三十，三四除十二；逢四进二十，二四除八。

2. 满归不满除用撞归——法实同头无除，用撞归定商的归除。例如：

37 125÷37 500=0.99

口诀：见三无除作九三，七九除六十三，五九除四十五；见三无除作九三，七九除六十三，五九除四十五。

3. 归讫无除，起一还原数——用九归诀定商偏大，须用起一诀退商的归除。例如：

1 314.28÷2 987=0.44

口诀：二一添作五，起一下还二，四九除三十六，四八除三

十二，四七除二十八；二一添作五，起一下还二，四九除三十六，四八除三十二，四七除二十八。

“满归不满除”和“归讫无除”同属“有归无除”，但前者用撞归，后者用归诀，情况不同。用撞归者“法实同头无除”，就是法实首位相同，而法数次位或以下各位大于实对应各位时，需用撞归。“归讫无除”是用九归诀定商偏大，余实不够除（乘减），须起一减商处理。

4. 归讫有余，进入身内——用九归诀定商偏小，余实须用逢进诀进商扩大（二次定商）的归除。例如：

18 357÷211=87

口诀：二一添作五，逢六进三十，一八除八；二一添作五，逢四进二十，一七除七，一七除七。

用归除法定商，须按照法实的大小情况，选用适当的九归诀或撞归诀定商，定得初商后，还要看余实够减或不够减，加以调整。王文素的归除法对初学者是颇有裨益的。

三、王文素的珠算飞归

珠算书首先著录飞归的是王文素的《新集通证古今算学宝鉴》。在《算学宝鉴》的丑本第五卷“二位归法”条目中，发展了杨辉的二位混然归法，编成了六十七归，七十三归，八十七归和九十三归 4 种飞归口诀，叫做“二位归法”。

六十七归括：见一下三十三，见二下六十六，见三作四百三十，见四作五百六十五，见五作七百七十一，见六作八百六十四，见三三五作五，遇六十七成百。

七十三归括：见一下二十七，见二下五十四，见三作四百零八，见四作五百三十五，见六作八百一十六，见七作九百四十三，见三六五作五。

八十七归括：见一下一十三，见二下二十六，见三下三十九，

见四下五十二，见五下六十五，见六下七十八，见八作九百一十七，见四三五作五，遇八十七成百。

九十三归括：见一下七零，见二下一十四，见三下二十一，见四下二十八，见五下三十五，见六下四十二，见七下四十九，见八下五十六，见九下六十三，见四六五作五，遇九十三成百。

这种二位归法口诀，凡有“成百”二字之句，应进商于实首前一位上，其他各句都把实首改作商数，并加余数于下位。举例如下：

8 091÷93=87

8091

见八下五十六+56

8651

见六下四十二+42

8693

遇九十三成百−93

+100

87

《新集通证古今算学宝鉴》在第七卷“方田”条还有“亩积步求二十四归诀”和“田亩飞归口诀”两则，都是由方步折算亩数的飞归诀。

亩积步求亩二十四归诀：

见一作四百零四，见二作八百零八，

见二四进一十，见四八进二十，

见七十二进三十，见九十六进四十，

见一四四作六，见一六八作七，

见一九二作八，见二一六作九。

田亩飞归口诀：

飞归见亩听根源，见一添三隔四连，
见二作八加小八，二四身前进一堪，
四八身前须二进，若逢七二进为三，
也知九六进为四，一二更身作五者。

“田亩飞归诀”中的“见一添三隔四连”句，即“二十四归诀”的“见一作四百零四”；“见二作八加小八”句，即“见二作八百零八”。

例：今有方田二十万零一百六十方步，折合若干亩？

解：用飞归计算如下：

```
 |2 0 0 1 6 0|
－1 9 2         } 见一九二作八
＋8
 |8 0 8 1 6 0|
   －7 2        } 见七十二进三十
  ＋3 0
 |8 3 0 9 6 0|
     －9 6      } 见九十六进四十
    ＋4 0
 |8 3 4      |
```

第三节　王文素对珠算补数与倒数乘除法研究

一、王文素对补数乘除法的发展

1. 补数乘法是以减法计算的乘法，古称“损乘”，以后称“以减代乘”和“减乘法”，今名“补数乘法”。这种乘法在《九章算术·刘徽注》中已经出现，唐代《夏侯阳算经》和南宋《杨辉

算法》有详述。王文素在《新集通证古今算学宝鉴》中则发展了这种方法。

损乘：

算法之中有损乘，只将欠数损分明，

传来此术真玄妙，定数仍从本法同。

解曰：损乘者损其欠数也，即九因损一之义。

棉布八十九匹，每匹价钱九十七文，问：该钱几何？

答曰：八千六百三十三文。

用价钱九十七文为法，置布八十九匹为实，从尾逐位隔位损三。

解曰：九十七是欠三损不满一百，故用隔位损之。余皆仿此。

今解（如图 6.1.4）：89×97＝89×（100－3）＝8 900－89×3

损乘图（原图）

八　九
十　匹
〒　ㄨ
以挨　以挨
八身　九身
命损　命损
三二　三二
十　十
四　七

八　六　三　三
千　百　十　文

今　解

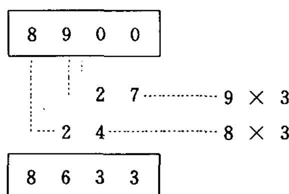


图 6.1.4　损乘图

《新集通证古今算学宝鉴》在阐述杨辉的《法算取用本末》“加因代乘三百题”时，所有因数 91～99，都用隔位损欠数计算。此外，王氏还将“损乘”发展为“众九为乘”和“众九相乘”二则。

众九为乘：

众九如将杂位乘，对行减数照身行，

亦犹因总除零数，定位仍从本法明。

棉布一百二十三匹，每匹价钱九十九文，问共该钱几何？

答曰：一万二千一百七十七文。

法曰：置总布，从尾见一隔位损一，合问，自下而上。

今解如图（6.1.5）：

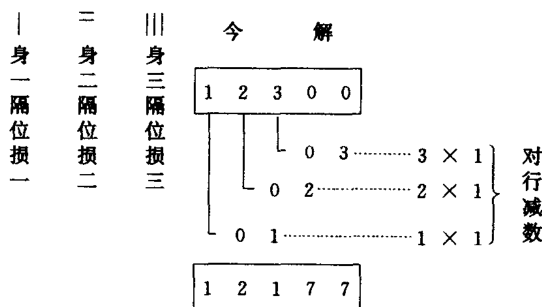


图 6.1.5 众九为乘图

织绢二十七匹，每匹用丝九两九钱九分，问：共用丝几何？

答曰：二百六十九两七钱三分。

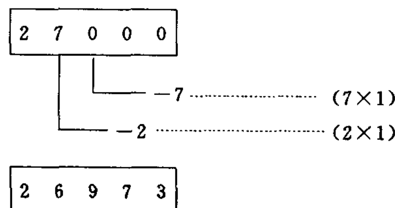
法曰：置总绢二十七匹，从尾后第三位对身后数减之。

解曰：法是三位，故于第三位减之。他皆仿此。

草曰：置总绢二十七匹，先变尾七匹，于尾后第三位减七。次变二十匹，于身后第二位减二。合问。

今解：$27\times999=27\times(1\ 000-1)=27\ 000-27$

拨 27 在盘上，先大 1 000 倍为 27 000，次减去 27，即得 269 两 7 钱 3 分。



（王文素）众九相乘：

单骑见虏法新传，代九繁乘极妙玄。

法实位同挪实尾，实多对法起挪堪。

法多法内忙挪减，对位挪来对位安。

算者若能知此意，科场出众敢争先。

解曰：众九相乘，用子甚多，算盘子少，乘则不便。既已乘毕，只动一子居下，余仍如故。视之久矣，忽得此法。且云：法实各二位者，只于实尾起一子，挪于尾后第二位，即得答数。定位如乘。假如三位实，二位法，于实第二位起一子，挪于尾后第二位。假如实是二位，法是三位，于法第二位起一子，挪于法尾第二位。

棉布九十九匹，每匹价钱九十九文，问：该总钱几何？

答曰：九千八百〇一文。

法曰：置总布九十九匹为实，于实尾起一子，挪于尾右第二位，即得答数，合问。

今解：

```
  9   9   0   0
  －  1 ………………………… 实尾起一子
      ＋  1 ……………… 挪于尾右第二位
———————————————
  9   8   0   1
```

此题运算为何这样简单？因为：

$99\times99=99(100-1)=9\,900-99=9\,900-(100-1)$
$=9\,900-100+1$

其中-100，就是在“实尾起一子”，$+1$就是在尾右第二位加1。

《算学宝鉴》还有3个“众九相乘”的例题，说明如下：

例1：$999\times99=98\,901$

解：法数二位，在实数第二位起一子，移于实尾后二位。

```
  9 9 9 0 0
 －1
       ＋1
──────────────
  9 8 9 0 1
```

例 2：9 999×999＝9 989 001

解：法数三位，在实数第三位起一子，挪于尾右第三位。

```
  9 9 9 9 0 0 0
   －1
            ＋1
──────────────────
  9 9 8 9 0 0 1
```

例 3：999 999×99 999＝99 998 900 001

解：法数是五位数，在实数第五位起一子，挪于实尾后第五位。

```
  9 9 9 9 9 9 0 0 0 0 0
           －1
                  ＋  1
──────────────────────────
  9 9 9 9 8 9 0 0 0 0 1
```

众九相乘的简算法：凡法实各位都是 9 的乘算，选择位数较多的一数为实数，较少的一数为法数。拨实数入盘，看法数是几位数，就在实数相同的第几位上起一子（拨去一子），同时加一子在实尾后相同的几位上，即得积数。按照这个方法，实际不必在盘上运算，心算就可以得出积数。

众九相乘的算法，是王文素研究了众九的法实同积数的差别后而想出的简捷算法。其算法仍属损乘范围。试以 9 999×999 为例，推算它的算法如下：

$$
\begin{aligned}
9\,999\times 999 &= 9\,999\times(1\,000-1)\\
&= 9\,999\,000-9\,999\\
&= 9\,999\,000-(10\,000-1)
\end{aligned}
$$

=9 999 000−10 000+1

```
9 9 9 9 0 0 0      ……法数 999 是三位数，
  − 1 0 0 0 0      ……在实数第三位减去 1，
            + 1    ……在实尾右第三位加 1。
―――――――――――――
9 9 8 9 0 0 1
```

2. 补数除法是补数乘法的逆运算，也是还原。古算书对此法没有专门的名称。清代以后称此法为“以加代除”，民间称之为“撞十数”，简称“加法”。补数除法萌芽于宋代的“增成法”，南宋杨辉和明代王文素都对此有发展。

《新集通证古今算学宝鉴》丑本第六卷“除法通变”节，介绍了杨辉《法算取用本末》中的“归减代除三百题”，特别对 97 除采用杨辉的“见一隔还三，遇九七起而进位成百”算法，有新见解。

直田积二千零三十七步，原长九十七步，问：阔几步？答曰：二十一步。

新证术曰：九十七为法。置积步，从头位见一隔还三，遇九十七起而进位成百为捷。

算草如下：

```
2  0  3  7
↑
└────────── 见二隔还六
   +  6
――――――――――
2  0  9  7
      └┬┘
       ↑
       └── 遇九十七起而进位
   −  9  7
+  1  0  0  成百
――――――――――
2  1
```

王文素“通证术曰：九十一至九十七，总用隔位还欠数，遇本数起进成一百。”这是对补数除法的新发展。杨辉对除数 91 至 99 都用别的代除法，但王文素仿照除数 97 的“见一隔位还三”计算，都用“隔位还欠数”来入算。

《新集通证古今算学宝鉴》丑本四卷四十七节，原有“众九为除”一诀二问，现存手抄本已脱漏，无可稽考。华印椿按照原书的“众九为乘”方法加以逆运算，并参照代除法，推测“众九为除”的算法如下页图示（图 6.1.6）[①]。

二、王文素对倒数乘除法的发展

利用倒数以乘代除，首先见于杨辉的《杨辉算书》。王文素继承和发展了这种算法。

《新集通证古今算学宝鉴》丑本第五卷“单因代除”一节，介绍了杨辉的以乘代除法，并阐明所乘的数是除数除 1 的数值。王文素“单因代除”：归除一数而得者，如二因可代五除，是二归一数得五也。又如三因可代繁三除，是三归一数得三三不尽之数也。又如四因可代二五除，是四归一数得二五也。

观此，王文素虽没有指出倒数的名称，实际上却阐明了代乘之数，是除数的倒数。

另外，王文素在《新集通证古今算学宝鉴》“单因代除”节中，纠正了杨辉《算法通变本末》卷上“单因”条中一题余数的错误。

杨辉的原题和答数如下：

钱二千七百四十六贯买银，每两一十四贯二百八十五文，问：共买得几何？

答曰：一百九十二两二钱二分，总余一十三文七分三厘。

---

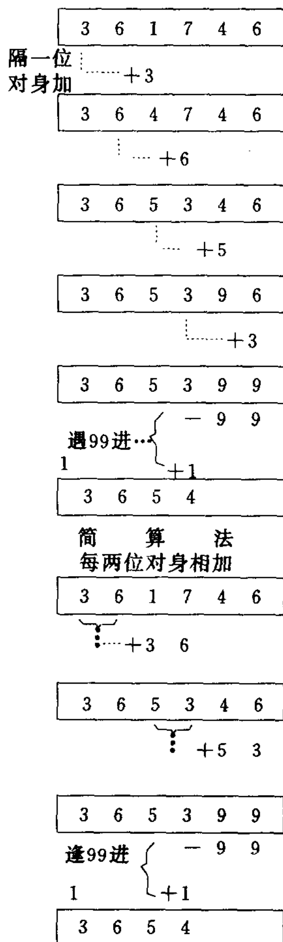
① 华印椿．中国珠算史稿．北京：中国财政经济出版社，1987．282～283

（例一）361 746÷99＝3 654

解：99 比 100 欠 1，从 361 746 的首位起，依次隔位对身相加，遇 99 起而进 1。

（例二）2 762 235÷999＝2 765

解：999 比 1 000 欠 1，从 2 762 235 的首位起依次隔二位相加，遇 999 进一。



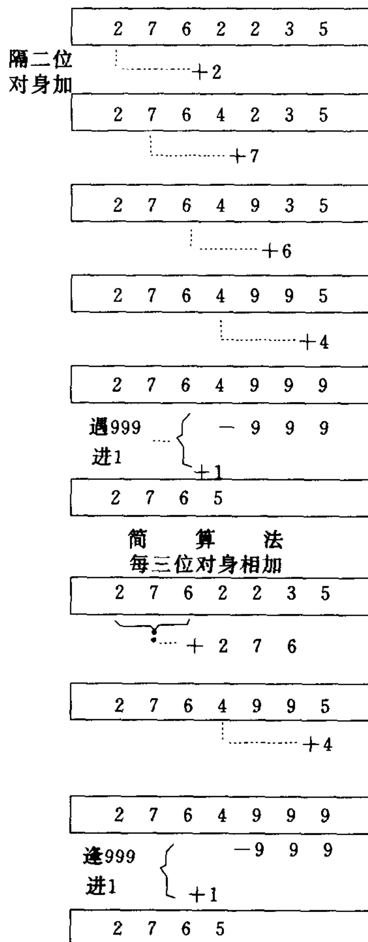


图 6.1.6　众九为除图示

术曰：七因以代一四二八五除。

草曰：置总数二千七百四十六贯，如商除定位，十贯上定两。七因得一百九十二两二钱二分。副置原实，折半，五退，为不尽零数（原实折半五退，得一十三文七分三厘）。合问。

王文素指出：不仅单因可代除，两位乘数也可代除，如十六乘代六二五除，三十二乘代三一二五除之类。于是，王文素遂将“单因代除”发展为“加乘代除”，即用11～19乘代多位数除算。例如：加一代隔九除（即11乘代90 909除），加二代八三三三除（即12乘代8 333除），加三代七六九二三除（即13乘代76 923除），加四代七一四二八除（即14乘代71 428除），加五代繁六除（即15乘代6 666除），加六代六二五除（即16乘代625除），加七代五八八二三除（即17乘代58 823除），加八代繁五除（即18乘代5 555除），加九代五二六三一除（即19乘代52 631除）。

对此王文素举例：

银一千两，每六钱二分五厘买盐一引，问：共买几何？

答曰：一千六百引。

术曰：加六以代六二五除也。

草曰：置银一千两为实，加六得一千六百引，合问。

解：
$$
\begin{aligned}
1\ 000\div 0.625 &= 1\ 000\div\frac{625}{1\ 000}\\
&= 1\ 000\times\frac{1\ 000}{625}\\
&= 1\ 000\times 1.6\ \text{（定身乘）}\\
&= 1\ 600\ \text{（引）}
\end{aligned}
$$

官银一万两赏军八千三百三十三人，问各支几何？

答曰：一两二钱，总余四钱。

术曰：加二以代八三三三除也。四因原实，退五位为除不尽零数。

草曰：置总银一万两为实，加二得一两二钱；副置原实，四因列于第五位，定为四钱，为除不尽数，合问。

解曰：以十二除一得八三三三，余四不尽，故以四因原实，退五位下之命零。

解：$10\ 000 \div 8\ 333 = 10\ 000 \div \dfrac{100\ 000-4}{12}$

$$= \frac{10\ 000 \times 12}{100\ 000-4}$$

$$= \frac{120\ 000}{100\ 000-4}$$

$$= 1.2 \cdots\cdots \text{ 余 } 4.8 \cdots\cdots$$

实际上：

```
                    1.2（商）
100 000－4)  1 2 0  0 0 0
            －1 0 0  0 0 0
                     ＋ 4
            ──────────────
               2 0  0 0 4
             －2 0  0 0 0
                    ＋ 0.8
            ──────────────
                    4.8……（余数）
```

第四节　王文素对其他珠算法的研究

一、王文素与凑整乘除法

1. 凑整乘法是王文素首创的，叫"因总损零"。把各个乘数添加了零星尾数使其成为整数，然后去乘被乘数，这叫"因总"；把乘得的积减去被乘数乘零数的积，叫"损零"。

《新集通证古今算学宝鉴》丑本第四卷四十九节“因总损零”条著录了一诀二问：

乘除借欠用因归，乘借因来后损之。

除借数归还借数，粮应此法少人知。

一问：棉布八十九匹，每匹价钱九十七文，问：该几何？

用八十九为法（数）。九因布价损一。

八十九是欠一不满九十，用九因损一求之。

解法：“九因损一”（如图 6.1.7）。

九因损一图（原图）

九十 七文

㐅 ⊥

㈠身七乘九变作六十三

㈡隔位损七

㈢身九乘九变作八十一

㈣隔位损九

捌千 陆百 叁十 叁文

今解

$$97\times 89=97\times(90-1)$$
$$=97\times 9\bar{1}$$

9 7	

+6 3 ········· 7×90

−7 ········· $7\times\bar{1}$

9 6 2 3	

+8 1 ········· 9×90

−9 ········· $9\times\bar{1}$

8 6 3 3	

图 6.1.7 九因损一原图及今解图

二问：三百八十八人，各支一百九十七文，问：共支几何？

用一百九十七为法。置总人，从尾位二因（乘），隔位损三。

解曰：一百九十七是欠三不满二百，故用二因（乘）隔位损三。

解法：二因（乘）隔位损三（如图 6.1.8）。

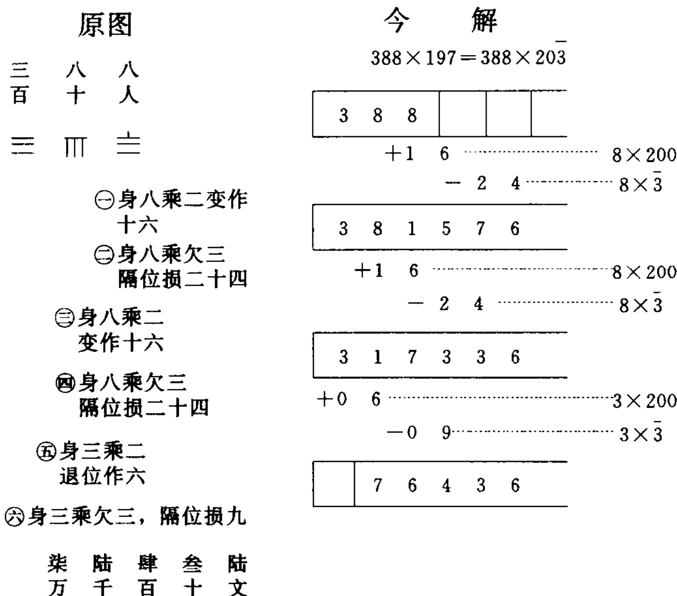


图 6.1.8　二因（乘）隔位损三及今解图

又法：用三百八十八为法，置各支钱数为实，从尾逐位四乘，隔位损一二。

解曰：三百八十八是欠十二，不满四百，故用四乘隔位损一二求之。

解法——四乘隔位损一二（如图 6.1.9）。

原图	今解	
一 九 七 百 十 文	$197\times388=197\times4\overline{1}\overline{2}$	
	1 9 7	
㊀七乘四 变作二十八	+2 8	7×400
㊁七乘欠一二 隔位损八十四	−0 7 −1 4	$7\times\overline{12}$
	1 9 2 7 1 6	
㊂九乘四 变作卅六	+3 6	9×400
㊃九乘欠一二 隔位损一〇八	−0 9 −1 8	$9\times\overline{12}$
㊄一乘四 退位作四	1 3 7 6 3 6	
㊅一乘欠一二 隔位损一二	+4	1×400
	−1 2	$1\times\overline{12}$
柒 陆 肆 叁 六 万 千 百 十 文	7 6 4 3 6	

图 6.1.9　四因（乘）隔位损一二及今解图

以上两种算法同是因总损零，但第一法的欠数只有一位，故计算较简，第二法的欠数有二位，故计算较繁。

2. 凑整除法古称“归总还零”，是凑整乘法的逆运算，也是还原。但这种特殊除法却比凑整乘法更早出现，是南宋杨辉首创的。

杨辉《法算取用本末》的“归减代除三百题”条目中，所有除数 191～199 的除法运算，都把被除数“从上位折半，见一隔位还零，遇本数起而成百”运算，设有例解如下：

罗四百九十一丈五尺二寸，各（人）支一丈九尺二寸，问：给几人？

术曰：从上逐位折半，见一隔位还八。置四百九十一丈五尺二寸，先折四百丈，得二百，隔位加还（二八）十六丈。又折百

丈得五十，加还四丈，共余十一丈五尺二寸。又折十丈得五，加还（五八）四尺，尚余十九尺二寸，适撞一人之数，共得二百五十六人。合问。

上题解法，把除数1丈9尺2寸凑入八寸，合成2丈整数。被除数491丈5尺2寸，从首位起，以折半代2除，每折得商数一位，随即隔位还零数（零数＝8寸×商数）。计算：

49 152÷192＝49 152÷（200－8）

49 152除以（200－8），运算时，49 152首先逐位折半（即除以2），所得商数乘以8，右退二位加乘积在余实内。运算图式如6.1.10。

```
          丈 尺 寸
  |   4  9  1  5  2
 +2 ........................ 实首4折半为2
       +1  6 ............... 隔位加还16(＝2×8)
  | 2  1  0  7  5  2
    +5 ..................... 余数首位1折半为5
          +4  0 ............ 隔位加还40(＝5×8)
  | 2  5  1  1  5  2
       +5 ..............}
             +4  0 .....} 同上
  | 2  5  5  1  9  2
       +1          }
          -1  9  2 } 遇本数起而成百(即进1)
  | 2  5  6
```

图 6.1.10　杨辉"归总还零"算图今释

《新集通证古今算学宝鉴》丑本第四卷"归总还零"条，继承杨辉的创新，但对被除数逐位折半法，认为遇单数3、5、7、9，折余之数同余实混在一起不便，主张用二归求商，隔位还欠数。按照王文素的算法，上题49 152÷192＝256的运算图如6.1.11。

可见王文素的"归总还零"比杨辉的"归总还零"更易掌握，是对杨辉"归总还零"的深化。

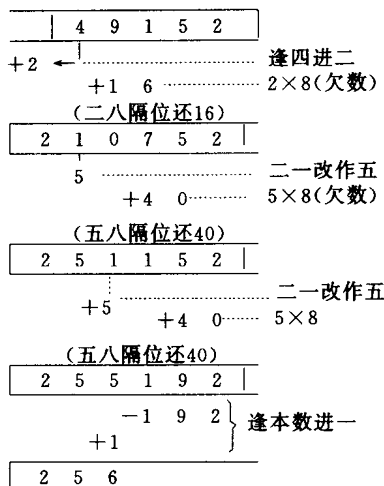


图 6.1.11 王文素"归总还零"算图今释

二、王文素与珠算乘除定位法

珠算乘除定位法始见于明代吴敬《九章算法比类大全》，以后王文素《新集通证古今算学宝鉴》、程大位《算法统宗》等书都有所发展。但直至清代，仍以王文素《新集通证古今算学宝鉴》为最高水准。

如第五编第三章所述，古今珠算乘除定位法，可分为"盘上定位"、"公式定位"、"掌中定位"三大类。王文素首先提出"盘中定位"名称，其方法属于"法首定位法"。珠算乘法用法首定位，大约是采用杨辉的对下乘用法首之数定实的方法。

乘法定位

《九章算法比类大全》中的乘法采用留头乘。它的积数定位法是：在实数单位的次位定为法首位。例如：今有丝二百九十三斤，每斤价钞二十七贯五百文，问：该钞几何？

答曰：八千五十七贯五百文。

法曰：置所有丝二百九十三斤为实，以所求价二十七贯五百文为法相乘。定位：

法首是十贯，合于斤上定百贯。

定位指示：

		（定百贯）	（法首十贯）		
二百 ‖	九十 ⅢⅠ	三斤 ‖|	次位		
得数	捌	〇	伍	柒	伍

王文素的乘法定位之例：

例如有米四十二石，每斗价银三分五厘，问：该银几何？

答曰：一十四两七钱。

法曰：置所有四十二石于左上为实，以斗价三分五厘于右下为法乘之，得一四七数。从原立实首之位，顺数寻斗，于斗下(位)定分，却逆数回至头位，得十两，定得一十四两七钱，合问。

定位指示：

原式

		实				法
		石	斗		分	厘
	四	二	（根）		三	五
			斗下定分		（法首）	
积	一	四	七	↓		
		两	钱	分		

除法定位

吴敬《九章算法比类大全》归除定位法：

从法首之数，以定其实。

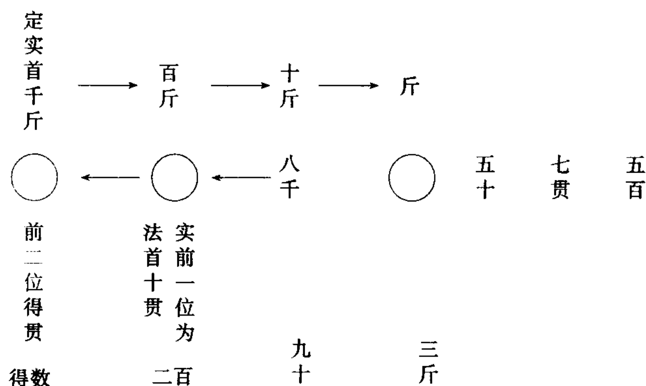
具体方法是：在实首的前一位作为法首，向前逐位数到法数个位，即把这位作为实首位，向后（右）倒数到实个位，定这一位为商数的个位。例如：

今有钞八千五十七贯五百文，每丝一斤价钞二十七贯五百文，问该丝几何？

答曰：二百九十三斤。

法曰：置所有钞八千五十七贯五百文为实，以所求价二十七贯五百文为法除之。定位：实首千贯，从实前一位数作法十贯，前第二位得贯，就从这一位数作实首千斤，向右倒数一位得百斤，再向右一位即实首得十斤，再向右一位（即空位上）定斤，共得二百九十三斤。

定位指示：



王文素除法定位之例：

假如有银一十四两七钱，每三分五厘买米一斗，问：该米几何？

答曰：该米四十二石。

定位指示：

首先置银 14 两 7 钱于盘左，3 分 5 厘于盘中之右，用归除计算，盘上得数字 42。法首是分位，在实数分位的上一位（即钱位），定为商数个位斗，即得商数 42 石。今解图如 6.1.12。

法首上为根(斗)

今解

	两	斗 钱	分		(法首)分	厘
1	4	7	0		3	5
三一卅一	逢三进一十 四五除廿					
4	0	7	0		3	5
		逢六进廿 二五除十				
4	2	0	0		3	5
十石	石	斗				

图 6.1.12 王文素除法定位今解图

通过比较可以看出,《新集通证古今算学宝鉴》的乘除定位法，比《九章算法比类大全》的方法直截了当，简便得多。事实上，王文素《新集通证古今算学宝鉴》中的乘除定位，共采用了“盘中定位”、“悬空定位”、“掌中定位”3 种方法，是比较全面的。其中“盘中定位”就是上面所列举的法首定位法。

盘中定位数诀：乘寻根下为法首

除寻法首上为根

解曰：定数之要有三：曰法，曰实，曰根，三者缺一，莫能定数。……假如卖米三石，每斗价银四分。此系乘法，以所有米三石谓之实，以价银四分谓之法，以斗为定价之根也。即寻斗位

之下定分，故曰："乘寻根下法首"者是也。假令前米三石，每二斗五升价银一钱。此系除法，以总米三石谓之实，以二斗五升谓之法，以所卖一钱谓之根；即寻斗位之上定钱，此谓"除寻法首上为根"者是也。

这里把法首定位的方法解释得一清二楚了。(悬空定位，掌中定位见第五编第三章。)

三、王文素与珠算开平方、开立方法

1. 开平方法

明代珠算开方，起初用商除，以后发展为归除。王文素是著述珠算开方的第一人。

《新集通证古今算学宝鉴》卷十六"平方节"对此有详述。

例 1. 方田积五百七十六步，问：每面方几何？

答曰：二十四步。

开二位平方图如 6.1.13。

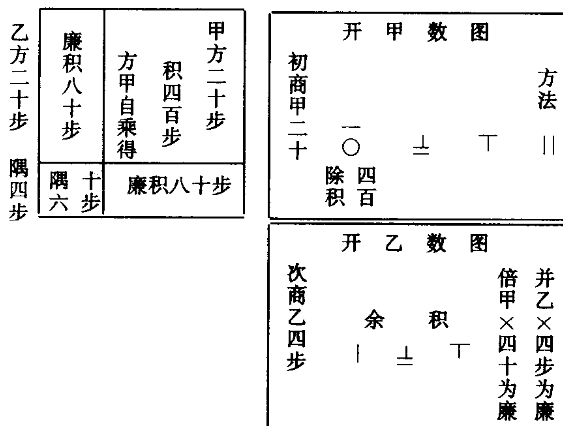


图 6.1.13　开二位方原图

运算步骤说明：第一步，置积 576（方）步为实（见开甲数

图），自个位向左分为二节（两位一节），首节满 4，定初商 20 步为甲，置于积数之上（左），另置 20 步于积数之下（右），名曰方法。以上甲 20 和方法 20 相乘，除积 400 步。第二步，余积 176 步（开乙数图）。把方法加倍为 40 步，名为廉法。以廉法 40 除余积 176 步，定次商 4 步为乙，置于甲廉后，叫隅法。廉隅共 44 步，与次商乙 4 步相乘，除余积适尽。得每面 24 步。今解图如 6.1.14。

今　解

	商	实	方法
(1)	20(甲)	576	20(甲)
		−400……………………	(20(商甲)×20(方法))
			+20(倍方法)
(2)	20	176	40(廉)
	+4(乙)		+4(隅)
(3)	24	176	44(廉隅)
		−176……………………	(4(商乙)×44(廉隅))
(4)	24	0	44

图 6.1.14　开二位平方今解图

例 2. 方田积一万六千六百四十一步，问：每面方几何？

答曰：一百二十九步。

开三位平方图如 6.1.15。

草曰：置田积一万六千六百四十一步为实。初商一百步为甲，置于积上。另置一百步于积下，名曰方法（见开甲图）。令上甲、下方相呼，除积一万步。余积六千六百四十一步。倍下位方法，得二百步，更名廉法。次商二十步为乙，并入上甲。另置二十步入下廉，名曰隅法（开乙图）。廉隅共二百二十步，命（乘）上乙二十，除积四千四百步，尚余积二千二百四十一步，又添乙二十步入廉法，得二百四十步，为丙廉。再商九步为丙，续入上位甲乙之后。另以丙九步续入下廉为丙隅。廉隅共二百四十九步，命（乘）上丙九步，除积二千二百四十一步适尽，得面方一百二十九

步，合问。(开丙图)

开三位平方图（原图）

丙廉积一千八百步	乙廉积二千步	一万步 甲方积 甲方一百步
	四百步 乙隅积	乙廉积二千步
十一步 丙隅八	丙廉积一千八百步	

开甲图	总积
商甲一百	一万 六千 六百 四十 一步 方法
开乙图	余积
商乙二十	六千 六百 四十 一步 乙廉法 乙隅法
开丙图	余积
商丙九步	二千 二百 四十 一步 丙廉 丙隅

图 6.1.15　开三位平方原图

今解图如 6.1.16。

今　解

	商	实	方法
(1)	100(甲)	16 641	100(甲)
		−10 000	……(100(商甲)×100(方法))
			+100(倍方法)
(2)	100	6 641	200(廉)
	+ 20(乙)		+ 20(乙隅)
(3)	120	6 641	220(廉隅)
		−4 400	……(20(商乙)×220(廉隅))
			+ 20(倍乙隅)
(4)	120	2 241	240
	+ 9(丙)		+ 9(丙隅)
(5)	129	2 241	249(廉隅)
		−2 241	……(9(商丙)×249(廉隅))
(6)	129	0	249

图 6.1.16　开三位平方今解图

2. 开立方法

王文素在《新集通证古今算学宝鉴》中讲解开立方法，其步骤是：首先将求初商、次商、三商（原书称商甲、商乙、商丙）分别提出计算通法，对于各位商数的求法，都提出约计方法，所举例题均有求初商和次商的具体算法。

立方开积求甲术曰：置积若干为实，从实尾常超二位逆数约之（一位只定一，千位定十，百万位定百，十亿位定千），初商若干为甲，置于积数之上为法。另置若干于积数之下，自乘得若干名曰甲隅，命上甲若干除实若干。

求乙术曰：仍三因甲隅若干，改名曰乙方。下三因甲若干，得若干，名曰乙廉。次商若干为乙，续于上甲之后为法，以乘乙廉若干，得若干。最后下置乙若干，自乘得若干为乙隅，皆副并入乙方，共若干为乙总，命上乙若干除实若干。更余实若，尚余若干。

求丙术曰：乃一因乙廉仍若干，皆并入乙总，共若干为丙方。下三因甲乙若干，得若干为丙廉。再商丙若干，续上甲之后为法，以乘丙廉若干，得若干。最下置丙若干，自乘得若干为丙隅，皆副并入丙方若干为丙总，命上丙若干除实若干。更余实若干，仿此求丁求戊。

积二亿四千四百一十四万零六百二十五尺，问为立方几何？

答曰：六百二十五尺。

草曰：置积二亿四千四百一十四万零六百二十五尺为实，从末位超二位约之。商甲六百置于积上，另置六百于积下，自乘得三十六万为甲隅，命上甲六百，除实二亿一千六百万尺，余实二八一四〇六二五尺。三因甲隅，得一〇八万，为乙方。三因甲得一八〇〇为廉。以方、廉之数约其余实（百万之上定一，千万之上定十），商乙得二十，续上甲后。

开甲布位图如 6.1.17。

开甲布位图

				原积					甲隅	
Ⅱ	╳	╳	—	╳	〇	丄	Ⅱ	〇̄	Ⅲ	丄
二亿	四千	四百	一十	四万	空千	六百	二十	五尺	三十	六万

图 6.1.17　(立方) 开甲布位原图

乙乘乙廉得三万六千。乙自乘得四百为乙隅，皆副入乙方，共一百一十一万六千四百为乙总，命上乙，除实二千二百三十二万八千尺，尚余实五百八十一万二千六百二十五尺。开乙布位图如 6.1.18。

开乙布位图

				余积					乙方		乙廉		乙隅
Ⅱ	≟	Ⅰ	╳	〇	⊥	Ⅱ	〇̄	Ⅰ	〇	≟	Ⅲ	⊥	╳
二千万	八百万	一十万	四万	空千	六百	二十	五尺	一百万	空	八万	三万	六千	四百

图 6.1.18　(立) 开乙布位图

乃一因乙廉，仍是三万六千。二因乙隅得八百，皆并入乙总，共一百一十五万三千二百，为丙方。

三因甲乙，得一千八百六十，为丙廉。

商丙五尺，续上甲乙之后，以乘丙廉，得九千三百。另置丙自乘得二十五，为丙隅。皆并入丙方，共一百一十六万二千五百二十五，为丙总。命丙五，除余实五百八十一万二千六百二十五，适尽，得立方六百二十五尺，合问。

开丙布位图如 6.1.19。

开丙布位图															
		余积							丙方			丙廉			丙隅
〇	≟	丨	二	⊤	‖	〇	丨	一	〇	‖‖	═	ㄨ	‖‖	‖	〇
五百万	八十万	一万	二千	六百	二十	五尺	一百万	一十万	五万	三千	二百	九千	三百	二十	五尺

图 6.1.19　（立方）开丙布位图

王文素此题今解图如 6.1.20

商甲 600	实 244 140 625	方	廉	隅	总
	−216 000 000 (甲隅×商甲$=a^3$)			甲$=a=$600 甲隅$=a^2$ $=$360 000	
+商乙　20 (得　620)	余实28 140 625 −22 328 000 (乙总×商乙)	乙方$=3\times$甲隅$=3a^2$ $=$ 1 080 000	乙廉$=3ab$ $=$ +36 000	乙隅$=$乙$\times$乙$=b^2=$ +400	$=$1 116 400 乙总 $(3a^2+3ab+b^2)$
+商丙 620 5	余实5 812 625 −5 812 625 (丙总×商丙)	丙方$=$乙总+乙廉+2×乙隅$=$ 1 153 200	丙廉$=3(a+b)\times c=$ 9 300	丙隅 $c^2=5^2$ $=$+25	$=$1 162 525 丙总$[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]$
625	0				

图 6.1.20　开立方今解图

王文素的开立方法，对各阶段的方、廉、隅，分别标以乙、丙、丁，并创乙总、丙总等名称，用来说明运算过程。他的开立方按

如下公式进行。

$(a+b+c)^3=a^3$（即：甲隅×甲）

$+(3a^2+3ab+b^2)b$（即：（乙方＋乙廉＋乙隅）×乙）

$=$乙总×乙$+[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c$

（即：（丙方＋丙廉＋丙隅）×丙＝丙总×丙）

王文素求次根、三根等有一定约计法，以方、廉之数约其余实得次根，即：$\frac{N_1}{3a^2+3a}$约得次根b；$\frac{N_2}{3(a+b)^2+3(a+b)}$约得三根$c$。

第五节　王文素的治学思想

王文素的治学思想，主要体现在《新集通证古今算学宝鉴·序》和同书的《集算诗》里。概括起来有4点。

1. 六艺科中算数尊。按儒家的正统观点，六艺之中算为末。作为一个通儒固然要学一点数学，但绝不能把主要精力放在数学上面。“修身、齐家、治国、平天下”才是最重要的。南北朝时北齐颜之推《颜世家训·杂艺》中说：“算术亦是六艺要事，自古儒士论天道，定律历者皆学通之。然可以兼明，不可以专业。”南宋朱熹说：“古人志道据德而游于艺。然九数虽为最末事，若而今行经界，则算法亦是有用。”与此相对，王文素认为，算数不应列在六艺之末，应当受到重视。他说：“六艺科中算数尊，三才万物总经论，乘除升降千般用，量度权衡五品分，天下钱粮凭是掌，世间交易赖斯均”。数是圣贤之说，倡导人们用心去学。

2. 数理可知，全在持之以恒。王文素认为数是“出于自然”的，有理可依，有规律可循，但却不是随随便便可得到的。即：

莫言算学理难明，旦夕磋磨可致通。广聚细流成巨海，久封

杯土积高陵。肯加百倍功夫满，自晓千般法术精。

他还以自己的亲自体会激励后学，言：

身似飘蓬近六旬，留心算学已年深，苦思善致精神败，久视能令眼目昏。铁砚磨穿三两个，毛锥乏尽几千根，如风扫退天边露，显出中秋月一轮。

3. 晓然示人，深求其故。王文素提倡由浅入深，循序渐进地学习和研究，要求著书立说深入浅出，晓然示人。最恨隐互错糅故弄玄虚。他以为诸家算书"总未周"，"……故忘鄙陋又重修，吹开毛孔寻疵病，使碎心机觅本流。"表明他精益求精的精神。王文素还特别强调学习要追根求源，不可一知半解。指出："百法源流当细审，四家周经莫轻谈。"

4. 千秋功罪，敢予评说。教育法上有句名言，叫做"师我者生，法我者亡。"意思是说，要学习前人的方法，但又不能步前人后尘。王文素在著作中谆谆告诫后学，不要迷信古人，不要迷信权威，要批判地继承和学习前人的方法、成就。他评述道："市鬻诸家俗算篇，数差法拙字讹刊。鲁鱼豕亥三为二，焉马平乎十作千。""诸家算籍甚差讹，暮玩朝参已证磨。"这说明王文素在当时盲目尚古的鄙陋风俗中追求严谨的风格。纵观其《新集通证古今算学宝鉴》的确讹误很少，是一部难得的优秀著作。

第二章 程大位的数学工作

程大位是明代后期数学家，他的《算法统宗》和《算法纂要》成为珠算方面的代表作，在国内外产生了深远的影响。本章对程大位的这两部数学著作（以《算法统宗》为重点）进行探讨。

第一节 程大位的《直指算法统宗》

一、程大位与《算法统宗》

程大位，字汝思，号宾渠，生于明嘉靖十二年四月十日（1533年5月3日）；卒于明万历三十四年八月十七日（1606年9月18日）。程氏系安徽省休宁县率口（今属屯溪市）人。率口程氏系一大族，据《程氏宗谱》记载，程大位系晋新安太守程元谭之后。程大位故居村边有石砌水渠，流入新安江上游支流——率水，其地土名“渠沿”，程大位之号宾渠，可能源出于此。

少年有志，勤劳躬行。程大位出身于小商人，从故居建筑来看，不是什么巨商大贾。徽州自古商业发达，徽商遍及全国。程大位不仅物质生活依靠商业，就是思想和治学方法也都受商业技术的熏陶。程氏幼年就聪敏好学，擅长书法，尤其喜爱数学，曾“不惜重资，以购求遗书”。“遇方田、粟米、差分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股诸书，厚资购得之。”常持筹握算，孜孜以求，因而养成了认真、细致、精核、严谨的治学精神。20岁左右，他利用外出经商的机会，“遨游吴楚，博访闻人志士”，接触了许多实际问题，深感学习数学之重要。认为“远而天地之高

广，近而山川之浩衍，大而朝廷军国之需，小而民生日用之赀，皆莫能外”。程大位身居农村，田亩丈量，谷仓计算等等之需要，使他的研究有很大的实用价值。他不仅深入实际，搜集问题，而且帮助群众解决问题。就以田亩计算来说，他不仅研究了各种形状的田积计算法，而且创造了“丈量步车”，画出了视图和立体图以便推广和应用。由此可见，深入实际，深入生活，是程大位治学方法的一大特点。



程大位画像

谦虚好学，治学严谨。程大位利用“商游吴楚”的机会，遇有“睿数学者，辄造请问难，孜孜不倦”。在他所著的《直指算法统宗》中，就刻有“师生问难图”，一个青年手持算盘，向老者请教，态度至诚。程大位 40 岁以后，倦于外游，便“归而覃思于率水之上余年 20”。认真钻研古籍资料，绎其文义，审其成法，遍取各家之长，加上自己的心得体会，终于写成《直指算法统宗》一书。书中列举算题 595 道，都附有详细解法。对于各家的理论、算法，他采取的态度是“前法之未发者明之，未备者补之，繁芜者删之，疏略者详之”；对于一些错误解法或者难于理解的地方，也订其讹谬，别其序次，清其句读，以便于初学。

不谋名利，造福后人。我国古代对数学的研究和教学，一向是比较重视的。“教国子以六艺”，数即居其一。许多数学名家，都深得当时统治者的重视，授予一定的官职，汉唐宋元都不乏其人。而程大位所处的时代却是中国数学走下坡路的时代，统治阶级包括一些知识分子，蔑视包括数学在内的一切自然科学，宋元时期的数学书籍到此大都散失，古代传统数学几乎失传。清人阮元称明代为“中算黑暗时代”，英人李约瑟在《中国科学技术史》第三

卷《数学》中也说，“在明初一百五十年间，数学上几乎没有什么令人注目的东西”。程涓在《算法统宗》序言中也指出，当时“六艺之教既寝，而算数之学，儒者绝不能举其概”，“即业其事者，有循习而无精诣”。特别是珠算，一些封建士大夫把它视作不登大雅之堂的“雕虫小技”。在这种数学研究的低潮时期，一个小商人，能不顾世俗的偏见为国民之兴盛，数学之流传而不惜资金购买算书，“殚思竭虑，精研其术”，终于克通其奥，写出巨著，并自己出资，镂梓以传，且不断增删，多次发行。这种甘为人梯，爱国爱民的精神，实为难能可贵。正因如此，程大位被人推崇，赠给“隶首薪传”匾额，高悬故居大厅。1986 年 9 月，中、日专家学者云集程大位的故乡安徽屯溪，隆重举行“纪念程大位逝世三百八十周年学术研讨会”。会前集资重新修复程大位故居，并命名为程大位纪念馆。程大位永远值得世人怀念，他的数学思想至今仍值得我们去研究、借鉴。

《算法统宗》十七卷，明万历二十年（1592 年）由宾渠旅舍刻本发行。作者依从《九章算术》的体例，集前人之大成，写出了这部切合民间日用的实用珠算算书。全书有 595 个应用问题，大多数是从传本数学中摘录的，又有所创新。程氏将所有数学计算都使用珠算，其中珠算开带从诸乘方，截两成斤法，新丈量步车等均为程氏所创。该书所载刻本数学著作，又为后人提供了资料。全书内容大略可分为如下 6 个部分：

（1）首篇　总说“数有本源”。列举河图、洛书、八卦、黄钟等。

（2）卷一至卷二　数学名词与词汇的解释，介绍算学常识与珠算知识。例如，大数、小数和度量衡单位、算盘图式、珠算定位法、九九表、九归诀、撞归诀、起一诀等，并举例说明在珠算盘上的用法。

（3）卷三至卷十二　应用问题解法汇编。各卷以《九章算

术》章名为标题，但粟米改称“粟布”，盈不足改称“盈朒”。卷三“方田”中记录了他自己创造的测量田地用的“丈量步车”。卷六、卷七为开平方、开立方的珠算方法。

（4）卷十三至卷十六　难题汇编。都是与卷三至卷十二中10类算法相应的算题。所谓“难题”，其解法实质上都很简单，不过题目用诗歌形式表达，意义比较隐晦。

（5）卷十七　杂法汇编。“杂法”是一切不能归入前面几卷里的各种算法，包括写算、纵横图、律吕相生等。

（6）附录　算经源流。著录了从北宋元丰七年（1084年）至明万历戊子年（1588年）约500年间的数学书籍51种。其中21种现在还有传本，余均失传。

《算法统宗》集珠算之大成，是我国珠算史上的一个里程碑。它的成书及其广泛流传，标志着由筹算到珠算这一转变的完成。《四库全书总目提要》评论《算法统宗》说“此书专为珠算而作，其法皆切于民用，故世俗通行。”颇为中肯。康熙五十五年（1716），程大位的曾孙光绅重刻的《算法统宗》序文说：“高祖宾渠府君，手辑是编，当时风行海内，坊间刻本，无虑数十。”所言极是。《算法统宗》刊行后，畅销数百年，不仅对我国，而且对周边邻国都产生了深刻的影响。它从理论上和实践上两个方面证明了珠算的可行性。正是从这个意义上来讲，程大位是珠算理论的奠基人。

《算法统宗》又集中算学之大成，对中算学的流传与普及作出了重大贡献。明代研究数学的人很少，宋版《九章算术》几乎失传，《永乐大典》虽有抄本，但一般读者不易看到。程大位系统地研究了《九章算术》中各种问题的解法，综合当时所能得到的数学书籍，以《九章算术》篇目为纲，列章分论，系统地介绍数学理论，并进一步充实发展，使“九章之经，乘除之法，无不昭昭焉。”明代，算书大都佚失，数学研究处于低潮，程大位就是处于

这种时代，对当时的中算学进行了系统的总结。

《算法统宗》还是一部很好的教科书。它结构严谨，由浅入深，文字通俗，易学易懂。《算法统宗》刊行后，之所以广泛流传，数百年不衰，有其客观原因，更有其主观原因，《刻〈直指算法统宗〉序》颇能说明其一二。序文说“今观其书，起张苍以迄今日，无类十数百家，详矣。顾质有明暗，见有偏全，或有九章而无乘除，或有乘除而无定位，各照隅隙，鲜窥衢道，矜察秋毫，卒忘眉睫，若是者盖大抵然矣。”程大位改正了前人算书的特点，又能抓住重点，精讲多练。其歌诀式便于记忆，又饶有趣味，使一般读者都能知晓。所有这些，即使在今天的教学中也仍有借鉴意义。当然，《算法统宗》也有其不足之处。如编纂时前后有所重复；个别算题的解法有误；[①] 一些数的近似值太粗疏（如 π 取 3，$\sqrt{2}$ 取 $\frac{7}{5}$）；其中有一些不科学的思想（如推算孕妇生男生女问题）；对前人的一些方法（如天元术、演段）认识不清等。但瑕不掩瑜，综合地、历史地评价《算法统宗》，它仍不失为我国明代数学的代表之作。

二、《算法统宗》与珠算算法

珠算加减法

指法：《算法统宗》中未讲指法，究竟打算盘时用哪几个手指，不甚清楚。

加减口诀：珠算加减口诀，即“上法诀”和“退法诀”，始见于明代吴敬《九章算法比类大全》的“起五诀”、“成十诀”、“破五诀”和“破十诀”。王文素的《新集通证古今算学宝鉴》中也著录了这 4 种口诀。在明代徐心鲁订正的《盘珠算法》中，综合成

① 李兆华. 算法统宗试探. 自然科学史研究. 1990. 310～312

全套的“上法诀”和“起法诀”，也就是流传到现在的加法口诀和减法口诀。《算法统宗》未著录上述口诀，只记有“九九八十一”，即传统的加减法基本功练习法，今常称之为“九盘清”。这种方法已见于《盘珠算法》，其基本方法是在空盘上连加123456789九遍，以达到熟练运算的目的。

珠算普通乘法

九九合数：即今之九九数。历史上，九九数有大九九和小九九之分。小九九是小数和同数在前、大数在后（如“七九六十三”、“三三如九”之类），大九九除了小九九的45句外，还有36句是大数在前、小数在后（如“九七六十三，八七五十六”之类）。程大位认为：“乘除加减皆呼此数”为与九归歌区别，“故呼小数在上，大数在下”，所以《算法统宗》只著录小九九。如：

一一如一　一二如二　二二如四

一三如三　二三如六　三三如九

珠算乘法：珠算的乘法继承了筹算乘法，可分为“上乘”（前乘法）和“下乘”（后乘法）。珠算上乘法的运算，先由实首乘以法数各位（一般由法首乘起），部分积放在实数本身的前面（左边），再依次由实首以后各位乘以法数各位，直到实尾法数乘完为止。下乘法的运算，先由实尾乘以法数各位，部分积放在实本身后面（右边），再依次由实尾以前各位乘以法数各位，直到实首同法数乘完为止。

珠算取代筹算，首先搬到算盘上的是下乘。《算法统宗》卷一“因乘论”中说：“置所有物为实，以所求价为法，皆从末位起，如法乘之，呼九字相生之数，次第乘之，呼如须次位，言十在本身。”这种乘法正是“下乘”。下乘包括留头乘、破头破、掉尾乘、隔位乘等。但程大位认为：

“乘法（留头乘）：按‘因’与‘乘’一也，单位者谓之因，位多者谓之乘，特以此而异其名耳。原有破头乘、掉尾乘、隔位乘，

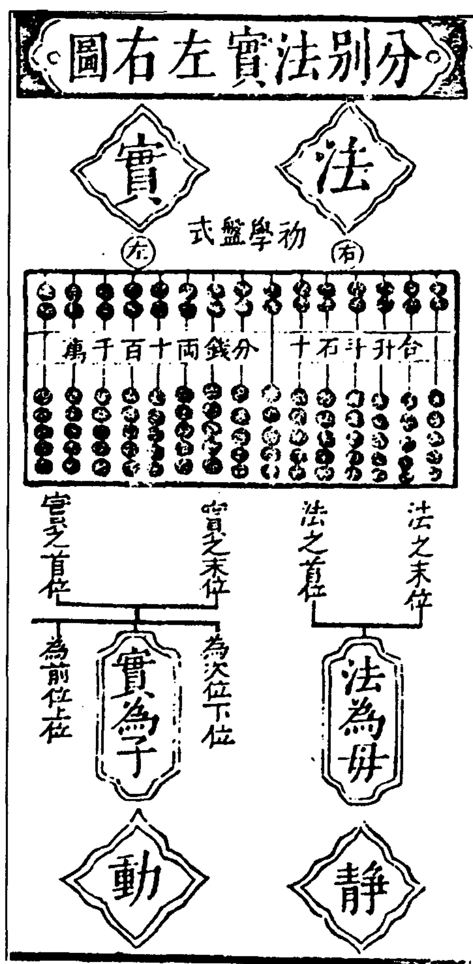


图 6.2.1　初学盘式图

（采自《算法统宗》卷二）

总不如留头乘之妙，故皆不录。”（见《算法统宗》“乘法门”）因此，《算法统宗》中的乘法只有留头乘这一种下乘。至于上乘不载

《算法统宗》。先于《算法统宗》的《新集通证古今算学宝鉴》对各种乘法，尤其是上乘进行了广泛的探讨，但未能推广。正如王文素在此书中说“此法世人知几有”，“多会算等工，但知身后乘，而不知身前乘”。可见当时珠算上乘法已不流行，再加上王文素的算书未能在世间流传，故上乘在明、清两代几乎无人知晓。《算法统宗》不载上乘亦在情理之中。

珠算凑倍乘除法

凑倍乘除法是我国古代民间的简易乘除法，原名“金蝉脱壳”，又叫“乘除易会算诀”；别名较多，有“大扒皮”、“剥皮”、“混归”、“飞流归”等名称，吴敬的《九章算法比类大全》是现存最早记载这种算法的书籍。《算法统宗》卷十七“杂法”载有“金蝉脱壳”：

因乘歌

起双下加倍，见一只还原，

倍一挨身下，余皆隔位迁。

例：“假如有米三石五斗，每斗价银七分。问：该银若干？”

“答曰：二两四钱五分”。

“法曰：置米三石五斗为实，将斗价七分为原法。另将七分倍之得一钱四分为倍法。先于实末位五斗上呼‘起双下加倍’，起了二斗挨身下一钱，次位下四分。再起二斗挨身下一钱四分，却呼‘见一只还原’，起了一斗，隔位下七分。次于三上呼‘起双下加倍’，起了二石挨身下一两，次位下四钱，却呼‘见一只还原’，起了一石，隔位下七钱，该得二两四钱五分。合问”。

由上例及“因乘歌”可知，程氏所述凑倍乘法与吴敬《九章算法比类大全》所述“乘法除双还倍数，须知去一要添原”意义相同，即将乘数加倍，从被乘数末位减起，减去二时下位加乘数之倍数，减去一时隔位加乘数，多次相减即可消去末位。然后用同样的方法同于末二位和其他位数，即可得到积数。

九归除歌

加双下除倍，加一下除原，

倍一挨身除，余皆隔位迁。

例："假如有钱二千二百五十文，给军九十名。问：每名该若干？"

"答曰：每名二十五文"。

"术曰：置钱二千二百五十文为实，以军九十名为原数，别以九十倍之，得一百八十名倍数。先于二千前挨身呼'加双下除倍'，除实一千八百，余实四百五十。次于余实四百前呼'加双下除倍'，除实一百八十，又呼'加双下除倍'，再呼'加一下除原'九十，恰尽。得每名该钱二十五文。合问。"

除法是将除数加倍，从被除数首位算起，前位加二时，被除数减去除数之倍数，前位加一时，被除数隔位减去除数。直到消去首位。将同样方法用于第二位和其他位数，即可得到商数。

二句字诀歌

有除隔位进，无除挨身进。

"隔一位除也，只用一原法，而无倍折数也。但因乘从实尾位起除一，隔一位而加原法数也；归除则从实前过一位起，亦隔一位而除原法数也；唯除实尽，是数。"此"二句诀歌"当与《盘珠算法》的"二字奇法"意义相同。

但程氏认为"金蝉脱壳并二句字诀布算繁叠"，"此小智之术不学可也"。这种观点也影响了清代人们对金蝉脱壳的研究。

这里有了一个问题：按程氏所述"因乘歌"在遇到"倍一"（倍数首位是1）才可挨身下，不是"倍一"（倍数首位不是进位数），都应隔位迁。但程氏在例题的算法中"假如棉布五十七匹，每匹价银二钱五分。问该银若干？"原法二钱五分和倍数五钱，都不是"倍一"，运算时却一律挨身下，显然误解"因乘歌"定档位的本义。正如余石所指出的："在昔一般轻视民间算法，对'倍

一’两字迄未作出正确的解释，程氏亦然。”

程氏不仅误解“因乘歌”，也误解“九归并除歌”。他阐述金蝉除说：“隔一位除者，只用原法，而无倍折数也。”其实，隔一位除者不限于原法，凡倍数不进位时，都应隔位除①。

由于程大位误解“因乘歌”中的“倍一挨身下，余皆隔位迁”二语的本义，清代有些珠算家受到影响，对金蝉乘除加减倍数的档位，混淆不清，没有统一；有的甚至照抄原文，未能改正，以讹传讹。

珠算斤两法

我国古代度量衡旧制，1斤等于16两，从斤价换算为两价需用16；2两以上的价还要用乘，很不方便。古人为实用方便，将这些换算法编成口诀，就是斤两法。这种口诀始见于南宋杨辉的《日用算法》，只有8句，到了元代发展成为15句，成为定型的“斤两法。”程氏《算法统宗》卷四所载“截两为斤歌”与元代相同，是一种化两为斤的歌诀：

一退六二五　　二一二五　　三一八七五
四二五　　五三一二五　　六三七五
七四三七五　　八五　　九五六二五
十六二五　　十六八七五　　十七五
十八一二五　　十八七五　　十九三七五

其方法为将十六进制小数转化为十进制小数。如：$(0.1)_{16}=0.0625$，$(0.2)_{16}=0.125$，$(0.3)_{16}=0.1875$等等。还有将斤数下隔位置零两数相加而后除以十六的。程氏说：“位（程大位）尝见算者遇斤下带两用法各不相同。有将两数为一二五者，又有将两隔位叠数而除十六加斤者，俱不合。式难兼归除甚非意也。”即上述两种方法都是比较复杂的。于是程氏又提出了“截两成斤歌”，

① 华印椿．中国珠算史稿．北京：中国财政经济出版社，1987．190～191

用于“斤下零两叠积以求斤数”：

一退十五	二退十四	三退十三
四退十二	五退十一	六退十
七退九	八退八	九退七
十退六	十一退五	十二退四
十三退三	十四退二	十五退一

这一思想是基于“算盘梁之上二子为十，梁之下五子，共有十五两。论一斤该数十六而欠一两，故曰一退十五以成一斤之数。”如12 斤 6 两+32 斤 13 两＝（12+32）斤+（6+13）两＝44 斤+（16+3）两＝45 斤 3 两。程氏对此法十分欣赏，自夸“此法极敏捷”。事实上，程氏之法同时进行了两种位制的加法：斤以上逢十进一，零两位数逢十六进一。可谓构思妙极，程氏自夸不为过也。

程氏心细如发，为防习者出误，又特别加以说明：“但货物用秤者，不拘法实。斤下有两数切不可隔位，必须挨斤之次设。若五斤十二两，就以十二两在五斤之下位，算盘梁之上二子、梁之下二子，即十二两也。若兼归除为法为实，就以十二两本身梁之上除去一子，余七，另以下位加五即为七五。然后用法乘、除之，即不差也。如除毕斤下有零数，必须从尾位起用加六之法。逐位逆上加之，至斤下止，切不可加于斤上，学者慎之。”

珠算商除法

商除法是我国古代传统的除法，其特点是商数用心算求得，运算方法同现代笔算法相似。我国古代的筹算除法，一直都使用商除法，但无专门的名称，南宋杨辉《算法通变本末》始有“商除”的名称。宋代产生了“九归歌诀”，逐渐形成用九归运算的归除法。至元代，归除法占居优势。以后珠算流行的除法，主要是归除，很少用商除。程大位的《算法统宗》也反映了这一现象，他在卷二讲珠算商法运算时，由易到难举了 10 个例题，一一阐述算法。但对商除法仅举两个例题，只有一个演算图式讲解运算方法。

至清代梅珏成在增删《算法统宗》时，把原书的商除一门删除不录。

虽然如此，程氏对商除还是较为重视，并充分认识到了商除的作用，他在卷二“商除”中指出：“商除者，商量而除之也。如定商太过则总数不足而无除；如定商不及则总数有余。务要酌量够除方可。然此一术亦兼归除，归除既通不必学此。但开方之法必用商除，演此而为梯阶，其法不可废也。”

程氏对商除的这种看法与吴敬在《九章算法比类大全》中的看法是一致的。今摘其一例如下：

“假如今有军士六百名，分粮三百九十四石二斗，问：每名该若干？

答曰：六斗五升七合。

法曰：置粮米于盘中为实，以军士名六百名于右为法。初商六斗于左位，就以左右相呼六六除实三百六十石，余实三十二石四斗，次商五升于左位六斗之次，就以次商五升对右六，相呼六五除实三十石，余实四石二斗再商合七于左位升五之下就以左七对右六相呼七六除实二四升斗，恰尽。”

珠算归除法

归除法与商除法的不同之处在于：商除法试商用心算，归除法用口诀试商，筹算的归除法口诀在元代已经完善，其计算方法已基本定型。明代中算家只是把它搬到算盘上，计算工具有所改革，但计算方法没有变化。所以，吴敬、王文素、柯尚迁、徐心鲁、程大位等所著算书中的归除法大都一致。

一位除法叫归，多位除法叫归除。归除中，以法之首位归实之首位得商，以商乘法之其他位减实叫除，后一步骤同商除。九归歌已载《详明算法》等书，今不再重复。

这里还应提到的是撞归法和起一还原法。“撞”字作“凑”或

“凑成”解释，“撞归”相当于“凑归”之意①。在归除中，法实同头无除时，用撞归，即将被除数首位撞凑成九，次位加余数。程大位所述撞归法为：撞归法

一归：见一无除作九一，二归：见二无除作九二，
三归：见三无除作九三，四归：见四无除作九四，
五归：见五无除作九五，六归：见六无除作九六，
七归：见七无除作九七，八归：见八无除作九八，
九归：见九无除作九九。

在归除中，用九归或撞归仍出现“无除”情形时，须用起一还原法。即“起一还将原数施”。程氏所述起一还原法如下：

已有归而无除，用起一还原法即是起一还将原数施。

一归：起一下还一本位起一，下位还一
二归：起一下还二本位起一，下位还二
三归：起一下还三本位起一，下位还三
四归：起一下还四本位起一，下位还四
五归：起一下还五本位起一，下位还五
六归：起一下还六本位起一，下位还六
七归：起一下还七本位起一，下位还七
八归：起一下还八本位起一，下位还八
九归：起一下还九本位起一，下位还九

“撞归者有归而无除之谓也。予以法实盈亏进退之理推之，盈则有归，照法首之数进于上位成十；亏则无除，起一退于下位，照法首之数还原。”

珠算定身乘

定身乘古代称“身外添几”和“身外加几”，简称“加法”，是早期的特殊乘法。凡乘数首位是1者，首位1省却不乘，只把次

① 华印椿．中国珠算史稿．北京：中国财政经济出版社，1987．247

位以下各位乘被乘数，乘积放在被乘数本身里，就得全部乘积。定身乘首先见于传本《夏侯阳算经》，在“求地税”和“说诸分”中，广泛应用“身外添几”乘法运算。南宋《杨辉算书》对身外加法又有所发展，以后元、明、清各代算书都著录此法，并把它搬到算盘上。

《算法统宗》卷一给出了“加法”的定义：“加法者，随母留身增添谓之加”。卷二又指出了这种方法的使用方法：“加法：凡加法，首位有一数者用此。置所有物为实，以所求价为法，加之。然加法不用首位一数，只以次位余数加之，言十就身加十，言如次位加如，亦从末位算起，用减法还原。”

珠算定身除

定身除古称“身外减几”和“身外减法”，简称“减法”，是定身乘的逆运算，也就是还原。凡除数首位是1的除法，首位1省却不除，只把除数次位以下各位数乘以商数，乘积从被除数相应的位上减去。定身除的运算，像商除一样需要估商，估得确商后，才可把商数同除数次位以下各位相乘，进行乘减。定身除的产生与发展和定身乘一样。

《算法统宗》卷一给出了“减法”的定义：“减法者，即曰定身除。除法约存原本之数而除之，故谓之减 。”卷二又指出了这一方法的使用：“减法：凡归除，遇法首位有一数者用此。所谓定身除者，先定本身之位，而后减除也。置所有物为实，以所求价为法，与身数相呼九九之数，言十就身，言如隔位，次第如法，减而除之。先从实首位起，用加法还原。”

“定位法：因实位本身减去而无逢进，比归除而降一位。今将法首一数除而不用，亦可以抵逢进升位也。”

定身除在实际中应用范围不及定身乘广泛。如《算法统宗》“减法门”举减一位、减二位、减隔位各一例。事实上，定身除仅在减隔位和减一位是小数码时，估商比较方便，运算较为简捷。可

是遇到除数为大数码，被除数为小数码时，不仅估商较难，而且在乘减过程中，往往有退商的麻烦。定身除跟商除一样，需要有熟练的估商基本功，才能应用自如。

乘除定位法

珠算乘除定位法同其它算法一样，是由筹算的定位法演变而来的。珠算乘除定位法始见于明代吴敬的《九章算法比类大全》，以后王文素的《新集通证古今算学宝鉴》、程大位的《算法统宗》等书都有所发展。

程大位的《算法统宗》主要有盘上定位和掌中定位两种。

盘中定位：盘中定位法，即在乘除运算之前，对拨在盘上的实，按照一定的方法，定出积、商的数位，然后运算；或者求得得数后，按照一定的方法，在得数中推定积、商的数位。程大位《算法统宗》卷一中的定位法叙述如下：

(1) 定位总诀：

数家定位法为奇，因乘俱向下位推。

加减只须认本位，归与归除上位施。

法多原实逆上法，位前得令须下宜。

法少原实降下数，法前得令逆上知。

(2) 十二字诀：乘从每下得术，归从法前得令。

由以上可知：珠算乘除法的定位法，与今之数档定位法基本相同。乘法由实首位向右数至法首位，再向下数一位即是积的个位。除法分为实多法少与实少法多两种情形。实多法少，由实首位向右数至法首位止，其左边一位即商之个位；实少法多，由实首位向左数至法首位，其左一位即商之个位。接着，程氏又继续解释。

(3) 定位秘诀：凡定位俱从实上原首次数起，至遇法首位乘则每术即斤、两、贯、个、石等类，除则不拘斤、两、贯、个、千、万等类则止。

(4) 直指定位诀：用因乘定位诀曰：预先以算盘上写定万、千、

百、十或顷、亩、石、斗、两、钱之类，因乘完毕，得数莫动。或云每亩科粮四升，但以亩之下位得升，以亩变斗，以十变石，以百变十石之类是也。余物仿此。

珠算开平方与开带从平方

元代和明初是筹算衰落、珠算兴起、两种算法交替的时代。元代和明初的算书著录的开平方法都不明言是筹算还是珠算，并且多数不附图式。为辨别古算书著录的开平方法是筹算还是珠算，今将两种方法比较如下：

筹算开平方与珠算开平方（都指商除开平方法）的相同点为：

（1）开平方各部分的名称都用商、实、方法（包括“廉”、“隅”）。

（2）首商（方根之首位）都用平方九九心算估得。

（3）次商与以下各位商数都用倍商法，即将已得的商数加倍，以约余实来得到。

筹算开平方法与珠算开平方法的不同点为：

（1）筹算用4层（商、实、方法、下法）或5层（商、实、廉法、隅法、下法）的纵式。珠算用3项（商、实、下法包括廉、隅）的一列横式，所以珠算要用多档算盘或几把算盘连接在一起运算。

（2）筹算开平方的“下法”又叫“借算”，借用一根筹以定商位，须上移，又须下退。珠盘开平方不用借算。

（3）筹算开平方的方法（包括“廉”、“隅”）在运算时须下退。珠算开平方的任何一项，运算时都不右退。

（4）珠算开平方的布数，有些算书说明：置实于“盘中”，有的则明言：商数置于实数“左上”，置下法于“右下”。

（5）珠算开平方最初为商除，后来发展成为用归除，凡归除开平方都是珠算。

由此可以断定：《算法统宗》为珠算开方。

《算法统宗》卷六所载开平方法，有商除开平方与归除开平方两种。商除开平方以方法约余实，决定次商及以下各商。术文所说“商约而除之”即此意。这种方法同筹算开方法。早于程氏的算书如《新集通证古今算学宝鉴》就记有这种方法。归除开平方是以九归来（包括撞归和起一还原）定商的珠算开方法。它与商除开平方法同源于《九章算术》开方术。珠算归除开平方法最早见于朱载堉的《算学新说》，但程大位未必见到此书，故程氏称此法为“新增”，当为各自独立发现。

今将《九章算术》筹算开平方法与《算法统宗》珠算开平方法列表（表 6.2.1）对比如下：

表 6.2.1

步骤＼书名	九章算术	算法统宗
1	置积为实。借一算步之超一等。	置积为实。别置一算名曰方法于实数之下，自末位至首常超一位。
2	议所得，以一乘所借一算为法，而以除。除已，倍法为定法。	约实，一下定一，千百下定十，万下定百，百万下定千。实上商置第一位，得若干。下位亦置上商若干，名曰方法，与上商相呼除实若干。余实若干，及以二乘方法（即倍法也）得若干为廉法。
3	其复除，折法而下。复置借算步之如初，以复议一乘之，所得副，以加定法，以除。以所得副从定法。	续商置第二位于上商之次得若干，下法亦置续商若干为隅法。于倍方之次共若干，皆与续商相呼，除实尽得开方之面数。

书名 步骤	九章算术	算法统宗
4	复除折下如前。	如不尽仍前再商之。
5	若开之不尽者为不可开，当以面命之。	或数不及以法命之。何谓之命，若余实若干不尽，却以所商得平方数若干倍之，再添一个共得若干，使商得面方多一数也。

商除开平方：今以《算法统宗》卷六第一问算题、答、术文及盘式列举商除开平方如下：

“假如今有围棋盘共子三百六十一个，问：每面子若干？

答曰：每面一十九个。

法曰：置棋子为实，约初商一十步于实左，下法亦置一十步于实右，左右相呼，一一除实一百个，余实二百六十一个就以下法一十倍之得二十。次商九个于左初商一十之次，亦置九个于右倍方二十之次，共得二十九，皆与左次商九相呼。二九除实一百八十个，又左九对右九相呼，九九除实八十一个。”(图 6.2.2)

归除开平方：《算法统宗》在商除开平方后，又阐述了归除开平方，但仅举二例，无盘式。今摘一例如下：

“今有平方积五万四千七百五十六步，问：平方一面若干？

答曰：二百三十四步。

归除开平方法曰：置积五万四千七百五十六步为实，于盘中见实约商二百於实左，亦置二百於右下，左右相呼，二二除，实四万步，余实一万四千五十六步。以右下二百步倍之，得四百步为法，归除之。呼四一二十二，逢四进一十，得商三十步。就置三十步于右四百之下相呼，三三除实九百步，余实一千八百五十六步。就以右下三十步倍之，得六十步，共四百六十步为法，归除之，呼四一二十二，逢八进十二，得商四步。亦置四步于右六

今列開平方法定分左中右式 凡有字亦照算盤自左至右

右 下法 初商(二)為方法 與左初商呼除中実 後倍作(二)為廉法 與左次商呼除中実

(商)為隅法 亦與左次商呼除中実

(商)除恰盡

中 (本)加二共八十又呼九九除実八十一併下位一去盡

(実)(三) 次商呼二九除一百八十箇本身去二下位加二

初商呼除本身一百箇餘二百

空位

左 次商(九) 又對右九呼九九除実八十一箇恰盡

左九對右二呼二九除実一百八十箇

初商(二) 左一對右一呼一一除実一百箇

图 6.2.2

十之下相呼，四六除实二百四十步。又呼四四除实一十六步，恰尽。以左上所商得二百三十四步，为平方一面之数也。”

“旧法”开平方法：对形如$ax^2=b$（$a\neq0$，$|a|\neq1$）的二次方程，可两边同除以a，化为$x^2=b/a$，用开平方法求解。中国数学家刘益曾给出不用两边同除以a，而直接用筹算开方的方法。程大位称之为“旧法”，并首次用珠算解这类问题。卷六有例如下：

“今有方田一段，圆田一段，共积二百五十二步。只云方面圆径适等，问：方圆径各若干？”

“旧法四因共积得一千零八步为实，以开平方法除之，并方四

圆三共七为隅于下法。初商一十，以隅七乘得七十为方法，与上商一十相呼，除实七百，余实三百零八步。另倍方法得一百四十为廉法。次商二步，以隅七乘得十四，并入廉法一百四十，共一百五十四，与次商二步相呼，除实恰尽。合问。”

上述解法即为解方程 $7x^2=1\ 008$，初商为10，令 $x=x_1+10$ 作减根变换：$7(x_1+10)^2=1\ 008$，故 $7x_1^2+140x_1=308$；次商为2，再作减根变换 $x_1=x_2+2$，$7(x_2+2)^2+140(x_2+2)=308$，从而有 $7x_2^2+168x_2=0$，故所求 $x=12$。

归除开带从平方法：已知长方形面积 $xy=q$，长阔差 $x-y=p$，求长和阔的问题，可化为二次方程 $xy=(p+y)y=y^2+py=q$。此二次方程称为带从平方或平方带从。这类问题的解法有两种：一种是归除平方带从法，将已知面积加大4倍，与长阔之差配成完全平方，开平方得长阔之和，即

$$\sqrt{4xy+(x-y)^2}=x+y$$

然后，将长阔之和与长阔之差相加折半，即得长。另一种方法是带从开平方法，即按珠算归除开方求根第二位之步骤，直接开方求得。例：

“今有田积一千七百五十步，只云长比阔多一十五步。问：长阔各若干？

答曰：长五十步，阔三十五步。

法曰：置积为实，以多五十一步为纵，列于下位，以带纵开平方法除之。初商三十于右位。下法亦置三十加于纵上，共得四十五步，与上商相呼。左三对右四呼，三四除实一千二百。又左三对右五呼，三五除实一百五十。另以下法初商三十倍作六十，加纵多十五共得七十五。次商五于左位。下法亦置五于倍方之下，共八十，比与次商五个呼。左五对右八呼，五八除，实恰尽。得三十五步，加多一十五步为长，合问。”

减积开方法：此法与带从开平方法原理相同，唯计算步骤略

有差别。带从开平方中，求得初商后，置商于右为下法，再求下法与从之和，以上商与和相呼除积；减积开平方中，以下法、从分别与上商相呼，两次除积。从几何意义上讲，后者先剖去一个正方形积，再剖去一个长方形积。减积当指减去上商乘从之长方形积。今举开带从平方法与减积开方法如下：

已知长方形面积 $xy=q$，长阔之和为 p，求长和阔的问题，相当于解方程 $x^2-px=q$。程大位给出了正确的解法。在求得上述问题的一个解后，程氏指出"若先问长者仍前布列，先商长减从亦得。"这又含有一元二次方程有两个根的思想。

《九章算术·勾股》第 20 题："今有邑方不知大小，各中开门。出北门二十步有木。出南门十四步，折而西行一千七百七十五步见木。问：邑方几何？""术曰：以出北门步数乘西行步数，倍之，为实。并出南门步数为从法，开方除之，即邑方。"这是中国数学史上筹算开带从平方的开端。此后《张丘建算经》卷中第 20 题、卷下第 9 题又给出两例。到宋元时期，这类问题由正负开方术求解。正负开方术属于增乘开方系统，在明代研究不多。程大位《算法统宗》首载《九章算术》开方系统的珠算开带从平方法，功不可磨。

另外，对于分数开平方，《算法统宗》给出

$$\sqrt{N+\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{aN+b}{a}}=\frac{\sqrt{aN+b}}{\sqrt{a}}$$ （其中 a 为完全平方数。）

减从翻积法：卷六有题为："今有田积八百六十四步，只云长阔相和六十步。问长阔各若干？"其解法用现代数学语言说，相当于设长、阔分别为 x、y，已知 $xy=864$，$x+y=60$，若先求长 x，则将 y 代入得 $x(60-x)=864$，即 $-x^2+60x=864$，求得初商 30 后，进行减根变换 $x=30+x_1$，则有 $-x_1^2=-36$。方程的常数项由正变为负，故称之为"翻积"。它继承了宋元以来秦九韶、李冶等

人的数学思想，扩大了方程的系数或常数的范围，较《九章算术》有所发展。

减积带从开方：指由面积相减与开带从平方两种方法联合使用。

珠算开立方与开带从立方

《算法统宗》所述开立方法，包括商除和归除两类。在盘上分左、中、右三段布数，左段布置商数（即立方根），中段布置实数（即被开立方数），右段布置下法，包括方、廉、隅等数。实数从个位向左，每三位为一节，每节得立方根一位。《九章算术·少广》有筹算开立方法，《算法统宗》所述开立方法与之原理相同，只是将筹算改为珠算。

珠算商除开立方法：《算法统宗》卷六所述商除开立方法十分详细，先有开立方法歌、认商歌、初商表，次有开立方步骤，最后又举例说明。

其商除开立方过程可表示为：

(1) 求初商 a：置积于算盘中段为实数，三位分节后，从第一节依照立方九九定得初商 a，分别置于实数左边的商位和右边的下法位上。其次，在实数第一节减去初商的立方数 a^3。余实续求次商。

(2) 求次商 b：以 3 乘下法 a 为方法 $3a$，置于下法的右边。以方法 $3a$ 约余实前段，从小酌定次商 b，分别列于商位和下法两方。以次商 b 乘下法 $(a+b)$ 为廉法 $[b(a+b)]$。以次商的立方为隅法 b^3，再次以方法 $3a$ 乘廉法、乘积 $[3ab(a+b)]$ 和隅法分别在余实内减除，如再有余实，续求三商 c。

(3) 求三商 c：把已求得的初商和次商二位，看作初商 a 一位，用求次商 b 的方法，以求三商 c。即以 3 乘下法 $(a+b)$ 为方法 $[3(a+b)]$，以方法约余实，从小定得三商 c。以三商 c 乘下法 $a+b+c$ 为廉法 $[c(a+b+c)]$，以三商 c 的立方为隅法 c^3。最后，

以方法 $[3(a+b)]$ 乘廉法 $[c(a+b+c)]$，乘积在余实内减去后，再减去隅法 c^3，如再有余实，用同样方法求得其余各位商数。

珠算归除开立方法：《算法统宗》卷六载有归除开立方题二例。归除开立方法与商除开立方法原理相同，都属《九章算术》开方法系统。区别是：归除开立方法以九归（包括撞归与起一还原口决）定次商及以后各商。今举一例说明之：

“今有立方积一亿零二百五十万零三千二百三十二尺。问：立方一面若干？

答曰：四百六十八尺。

归除开立方法曰：置积为实，以七千万该商四百尺于左上。又置四百尺于右下，自乘得一十六万，相呼，一四除四千万尺。又四六除二千四百万，余实三千八百五十万零三千二百三十二尺。却以右下一十六万尺以三乘之，得四十八万为法，归除之。呼四三七十二，少除，呼四归起一下还四，呼六八除四十八。另置初商四百尺，以次商六十尺乘之，得二万四千尺，以三因之，得七万二千尺为廉，加入次商六十尺自乘，得三千六百尺，共七万五千六百尺。却以次商六十尺相呼除之，六七除四十二，又五六除三十，又六六除三十六，余实五百一十六万七千二百三十二尺。以方法四十八万并入两个廉法七万二千，再并入隅法三个三千六百尺，共得方法六十三万四千八百尺为法，归除之，呼六五八十二，呼三八除二十四，又呼四八除三十二，又八八除六十四，右下法不用再置，所商共四百六十尺。以次商八尺乘之得三千六百八十尺，以三因之得一万一千零四十尺并入再商八尺，自乘得六十四尺，共一万一千一百零四尺。又以次商八尺相呼除之，一八除八万，又一八除八千，又一八除八百，又四八除三十二尺，除实恰尽。以左上所商四百六十八尺为立方一面之数，合问。”

此题的求解过程，解释如下：

（1）求初商（这一步与商除开立方步骤相同）：置积

102 503 232于盘中为实，三位分节后，从第一节 102 按立方九九得初商 400，置于实左；又置于右下，自乘得 160 000，再乘以初商 400，在实内边乘边减，余实 38 503 232。续求次商。

（2）求次商：以右下 16 万乘 3，得 48 万用归除约余实前段，定次商为 60。另置初商 400，乘以次商 60，再乘以 3，得 72 000 为廉法。又以次商 60 自乘得 3 600 为隅法。廉法加隅法得 75 600，乘次商 60，在余实内边乘边减，尚余实 5 167 232。续求三商。

（3）求三商：以方法 48 万并入廉法 72 000 两个，再并入隅法 3 600 三个，共得 634 800，用归除约余实，求得三商 8，尚余实 88 832。拨去下法各数，另置已得商 460，乘以三商 8，再乘以 3，并加入三商 8 的自乘积 64，共得 11 104。次以三商 8 乘 11 104，在余实 88 832 内边乘边减，恰尽无余。得立方根为 486 尺。

一般地，用现代数学语言来说：设被开方数为 N，初商为 a，次商为 b，其开立方过程可如下表示：

求初商，用以下公式估商：

$$N=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

求次商，由公式

$$N-a^3=3a^2b+(3ab+b^2)b$$

中 $3a^2$ 的首位归 $(N-a^3)$ 的首位。其中 $(N-a^3)$、$3a^2$、$3ab$、b^2 分别称为余实、方法、廉法、隅法。

如有三商 c，由公式

$$N-(a+b)^3=3(a+b)^2c+[3(a+b)c+c^2]c$$

中的 $3(a+b)^2$ 的首位归 $[N-(a+b)^3]$ 的首位。其中 $[N-(a+b)^3]$、$3(a+b)^2$、$3(a+b)$、c^2 分别称为余实、方法、廉法、隅法。

据现有资料，程氏所载珠算归除开立方法是这一方法的最早记载。该书卷一“开立方法”云：“今新增归除开立（方），故法之易便矣。”所言确实。

对开立方不尽者，程氏借助开立方运算中的“法”来表示奇零小数。即$\sqrt[3]{a^3+r}=a+\frac{r}{3a^2+3a+1}$，其中$a$为$\sqrt[3]{a^3+r}$的最大整数部分，也就是程氏所说的“法”。

开立方带从法：

形如$x^2(x+p)=q\ (p,\ q>0)$，

$x(x+p)^2=q\ (p,\ q>0)$，

$x(x+p)(x+q)=r\ (p,\ q,\ r>0)$

的三次方程称为立方带从或带从立方。其解法称为开立方带从法或开带从立方。这类问题的一个典型例子可概述为：已知长方体体积，又知长比宽、长比高多若干，求长方体的长、宽、高各多少。程氏在《算法统宗》卷六只涉及前两种情形。今举卷六开立方带从法第一问如下：

“今有方仓贮米五百一十八石四斗，方比高多三尺。问：方高各若干？

答曰：方一丈二尺，高九尺。”

“法曰：置米五百一十八石四斗，以解法二尺五寸乘之，得积一千二百九十六尺为实，以开立方带纵除之，以方多三尺自乘，得九尺为纵方。再置三尺倍之，得六尺为纵廉，约积一千，商十尺，今有纵方只商九尺，置于实前，另以九尺自乘，得八十一尺。加入纵方九尺，共九十尺为方法。另以纵廉六尺，以九尺乘之得五十四尺为廉法，二法并，共一百四十四尺于右下。以所商九尺，相呼一九除九。又呼四九除三十六，又四九除三十六，实尽。以商九尺为商，加入方多三尺，得方仓一十二尺，合问。”

带从立方问题及其解法不载《九章算术》，它在中国数学史上出现较迟。《隋书・律历志》称：祖冲之曾“开差幂、开差立，兼以正负参之。”钱宝琮认为“开差幂”即为开带从平方，“开差立”即开带从立方。唐初王孝通精于开带从立方法，但所著《缉

古算经》不载演算步骤，后人难晓其如何求解。宋元时期中算家用正负开方术求解高次方程的数值解，成为世界数学史上的光辉成就。程大位依据吴敬《九章算法比类大全》，首次用珠算求解带从立方问题，难能可贵。

珠算三次以上开方问题

程大位于《算法统宗》卷六列“开方求廉率作法本源图”（图6.2.3)，详细说明了二项式展开式的各项系数的由来，以用于开任意次方。并举三乘方为例，说明原理。

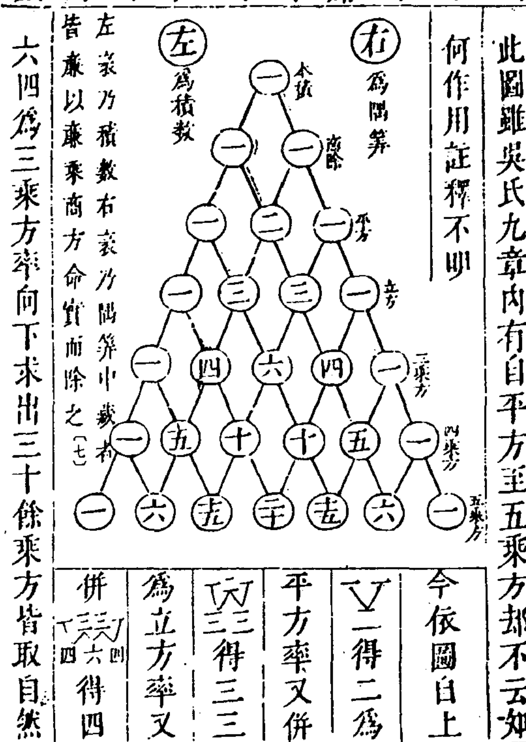


图 6.2.3

“今有三乘方积二千零一十五万一千一百二十一尺。问：一面若干？

答曰：六十七尺。

法曰：置积为实，下法常超三位，零初商六十于左。零下法亦置六十自乘得三千六百，再乘得二十一万六千为隅法。与上商六十相呼除实一千二百

九十六万，余实七百一十九万一千一百二十一尺。乃以四乘隅法二十一万六千，得八十六万四千为方法。另置上商六十自乘，得三千六百。又以六因之，得二万一千六百尺为上廉零又置上商六十以四乘得二百四十尺为下廉次商七尺于左六十之次。下法亦置七尺自乘，得四十九尺，再以七因，得三百四十三尺为隅法。又以次商七尺乘上廉二万一千六百，得一十五万一千二百。又以七因下廉二百四十两次，一次因得一千六百八十尺，二次亦以七因，得一万一千七百六十尺。以方法八十六万四千、上廉一十五万一千二百、下廉一万一千七百六十、隅法三百四十三，并四法，共一百零二万七千三百零三尺，皆与次商七尺相呼除实，恰尽。得一面六十七尺。合问。此三乘方捷径。”

“一法。用二次开平方法除之，亦得。初一次置积数为实，以开平方法除之，商得四千四百八十九尺。第二次就以此初商数为实，亦以开平方法除之，即得一面六十七尺。合问。此又捷径。

若还原，置一面六十七尺自乘，得四千四百八十九尺，再乘，得三十万零七百六十三尺，又乘之，即见原积数也。”

卷七载有圆田截积问题：“今有圆田中径一十三步，今从边截积三十二步，问所截弦矢各若干?”此题出自《田亩比类乘除捷法》卷下，系杨辉依据刘益《议古根源》改编而成。刘益的时代，天元术尚未产生，这一问题的方程是怎样列出的，目前尚不甚清楚。今依据《九章算术》弧田术及弦矢求径术分析如下：

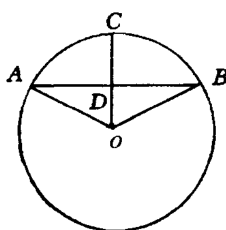


图 6.2.4

如图 6.2.4，圆 O 的直径为 d，弓形 ABC 的面积为 S，弦 AB 为 c，矢 CD 为 v。由弧田术：

$$S=(c+v)v/2$$

由弦矢求径术

$$d=\frac{(\frac{1}{2}c)^2}{v}+v$$

由以上两式消去 c，可得

$$-5v^4+4dv^3+4Sv^2=(2S)^2$$

对于这个四次方程，刘益原用增乘开方法求解得一个正根。程大位未采用这种方法，仍用传统的开方法。这是用珠算解四次方程的最早记载，今摘录其求解方法如下：

“今有圆田中径一十三步。今从边截积三十二步，问所截弦矢各若干？

答曰：弦一十二步，矢四步。

法曰：倍积得六十四步，自乘，得四千零九十六步为实。以四因积三十二步，得一百二十八步为上廉。又以四因径一十三步，得五十二步为下廉。以五为负隅，用开三乘方法除之，商四步于左上为法，以乘上廉，得五百一十二步。就以商四乘隅五，得二十以减下廉五十步，余三十二。另以商四自乘，得一十六，以乘下廉三十二，得五百一十二。并上廉五百一十二，共一千零二十四为下法，除实，得矢四步。另置积倍之，得六十四步，以矢除之，得一十六步，减矢四步，余得弦一十二步。合问。”

三、《算法统宗》与珠算教学

《算法统宗》作为一部教科书，有很多地方值得我们学习和借鉴。今分析如下：

由浅入深，化难为易

如卷一从便蒙通用的“九九八十一”（即“九盘清”）开始，继而讲“九九合数”（即乘法口诀）和“九归歌”（除法口诀）。接着解释名词，论述定位理论，并结合生活中最常见的实例，说明算法。这样逐步深入，降低了问题的难度，便于各种程度的人学习。再如，在讲珠算的乘除运算时，按乘（或除）数的位数由一位、二

位到三位或三位以上，再到分数。在讲方程时，先由二色、三色、以至四色、五色等等。程大位在讲勾股测量时说“本经（《海岛算经》）题目广远，难于引证学者，今将孙子度影量竿题问于前，引用详解，以验《海岛》之法，亦循循诱人之意也。姑以一问，其余好学者，自能触类而考知矣。”

抓住重点，精讲多练

在讲基本算法时，重点抓住留头乘和归除，不分神于其他方法。在讲乘除定位时，讲盘中定位法，方法简单，整数和小数都能适用。理论或方法的讲述，重点突出，十分精练。每种算法之后，都附以实例，详加分析，有答，有术，有盘式，有补充说明。算题的类型有多种多样，如除法中有实多法少，又有法多实少等。使读者不断练习，在熟中生巧，在熟中体会到算法的实质。

求解验证，相辅相成

书中每一算题在求解结束后，大都有还原法。如卷二在讲乘法时有：

“假如今有谷二百四十六石九斗，每石碾米五斗。问：该白米若干？”

“答曰：一百二十三石四斗五升”。

“法曰：置谷为实，以每石碾米五斗为法因之。合问。”

在讲述了具体的演算步骤后，又说“还原用五归，法详后：

五一倍作二，五二倍作四，五三倍作六，五四倍作八，逢五进一十。”这样，在得到答案后，再用“还原”进行验证，即可以知道答案是否正确，又同时练习了两种运算。

一题多解，开拓思路

书中对许多算题都给出了两种或两种以上的解法。如卷四有算题为：

“今有丝四十三斤二两，织绢每匹用丝一斤，与织工丝四两。问：各该若干？”

其解法，一种为将两化斤，另一种为将斤化两。

又如求“四六差分”时，“法曰：各以四为首，用如五以求各衰。…一法以首位为四，用四归六因以求各衰。”

再如卷九“今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足。问：鸡兔各若干？”

其解法一为先求兔数：$\frac{94-35\times 2}{4-2}=12$

一为先求鸡数：$\frac{35\times 4-94}{4-2}=23$。

又如卷十一有算题为：“今有绢三匹添价六钱，买布十匹。又布五匹，添价一钱买绢二匹。问：绢布价各若干？”

“法曰：如前正负术之。此问可作盈不足算。”

这样，对同一问题从不同角度进行讨论，异途同归，又对问题本身有更好的认识，使思路宽广，启迪作用大。

不泥古人，实事求是

在卷三，程氏针对田地测量中存在的一些问题，尖锐地指出，“凡量田地，切不可以周围步数算而计积，其谬已甚。今举方直二形校之。其方田每面三步，计积九步。其直田长四步阔二步，计积八步。论周围俱各一十二步，二者小数较之而差一步，何况于大者乎！”

再如卷三“钱田”题，程氏首先指出过去马杰的错误解法，据理力争，有理有据。然后又给出了正确的算法。对《张丘建算法》中取“方五斜七”也提出了类似的看法。

选题得当　富有趣味

书中选取了许多颇具趣味又具有代表性的算题，这些算题切于实际，便于理解，引人入胜。如卷五：

“今有石，中有玉方三寸，共重一十二斤十五两，只云玉方一寸重一十二两，石方一寸重三两。问：玉、石各重若干？”

“今有客三次出外为商，俱得全利。每次归还银三百两，三次

本利恰尽。问：原本若干？"

"今有物不知数。只云三数剩二个，五数剩三个，七数剩二个。问：共若干？"

"今有客不数，只云二人共饭，三人共羹，四人共肉，通共用碗六十五只。问：客若干？"

卷九"今有人车不知其数，凡三人共车二车空，二人共车九人步。问：人车若干？"

"今有斋僧不知人数，初日每五人米八斗，次日每九人米七斗，凡二日共米三十二石十斗。问：僧并米若干？"

"今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足。问：鸡兔若干？"

"今有狐狸一头九尾，鹏鸟一尾九头。只去前有七十二头，后有八十八尾。问二禽兽各若干？"

每一个算题如同一个故事，一首小诗，富有趣味，耐人寻味，使本来枯燥的数学变得津津有味。

文理交融，寓算于文

卷十三至卷十七为难题杂法，这些算题多用诗词形式写成，如《西江月》、《凤栖梧》、《双捣练》、《梅气清》、《水仙子》等等，使人在解题中得到美的熏陶，美的享受。今摘卷十四第一问如下：

《西江月》

净拣棉花弹细，相和共雇王孀。

九斤十二是张昌，李德五斤四两。

纺讫织成布匹，一百八尺曾量。

两家分布要明彰，莫得些儿偏向。

形数结合 图文并茂

《算法统宗》很注意形数结合，利用图形变换来论证算法的依据。如卷六开方问题。

程氏附有"方廉隅法图"、"带从平方图"、"长阔相当求和图"、"减纵开方图"等等，用图形方法演示其几何意义，使开方

过程具体直观。凡面积、体积问题大多都附有图形演示。

全书有许多插图，如“引葭赴岸”、“开门去阃”、“竹折仆地”、“窥望海岛”等题都附有插图，这些插图使读者如临其境，增添情趣。

歌诀形式　便于记忆

全书歌诀甚多，简直是一部歌诀集。

①乘除歌诀　这是珠算的需要，如二三如六，三三如九。

②算法歌诀　如《因法歌》曰：

合数九因须记熟，起手先从末位推。

言十就身如隔位，若要还原用九归。

③公式歌诀。如卷三有：

方自乘之积步明，直田长阔互相乘。

勾股圭梭乘折半，圆田周径折半乘。

周自乘之十二约，径自乘之七五乘。

周径相乘四归是，碗田丘田同上乘。

环田内外周相并，折半须将径步乘。

梯斜两头相并折，长乘便见积分明。

……

④算题歌诀

今携一壶酒，游春郊外走。

逢朋添一倍，入店饮斗九。

相逢三处店，饮尽壶中酒。

试问能算士，如何知原有。

我问开店李三公，众客都来到店中。

一房七客多七客，一房九客一房空。

当年苏武去北边，不知去了几周年，

分别记得天边月，二百三十五番圆。

今有千文买百鸡，五十雄价不差池。
草鸡每个三十足，小者十文三个知。

这些歌诀琅琅上口，便于习诵，易于记忆，便于流传。另外，这些歌诀极富民族特色，对于激发学习积极性，开发学生智力，具有现实意义。

源于生活 联系实际

《算法统宗》是一部实用算术，它的问题都源于生活，又服务于社会实际。

作者程大位从亲自实践中总结经验和体会，这在今天仍有一定意义。今以他所创“新丈量步车”阐述如下：

卷三载有“新丈量步车图”。（如图6.2.5），图后有图文，说明其结构及尺寸。比余楷的“制车”更好一些。丈量步车主要是用竹篾做成，类似现在测量用的皮尺，是一种量田工具。整个结构由一个框架、一个转轮、一条竹篾以及提把儿、摇把儿、钻

新制丈量步車圖

積步問畝二四歸除 畝問積步二四乘法 今惟休邑新立畝法

車式三而合一圖

图 6.2.5

脚等部分组成。竹篾易于舒卷，摇把儿与木转轮固定在一起，转动摇把儿即可将竹篾缠绕木转轮外周。木框架与木转轮由摇把儿连接，兼有束缚竹篾的作用。竹篾上依步分厘制刻划长度单位："篾上逐寸写字。每寸为二厘，二寸为四，三寸为六，四寸为八，不必厘字。五寸为一分，自一分至九分俱用分字。五尺为一步，依次而增于三十步以上或四十步以下可止。"因五尺为一步，故五寸为一分，半寸为一厘或即一寸二厘。如以此步车量得方田边长为若干步分厘，自乘，以亩法二百四十步除之，则迳得方田积为若干亩分厘。可见，这种丈量工具较古代的"弓"（每弓为五尺）方便又准确，有较大的实用价值。

四、从《算法统宗》所见明朝社会经济

度量衡

古人以黄钟为万事之根本，律度量衡皆由此始。《算法统宗》卷首给出的"黄钟万事根本图"代表了中国传统数学的这一观点。

"黄钟生度"是积黍起度或累黍起度，即以一定数量中等秬黍累积起来作为度的基本单位。但因累黍方法不同，产生了三种基本的尺：纵黍尺、斜黍尺和横黍尺。纵黍尺是将黍粒沿直线纵排八十一粒，一黍之纵为一分，九分为寸，九寸为尺。是为九进制尺。斜黍尺是将黍粒首尾斜置，沿直线排列九十粒，一黍为一分，十分为寸，九寸为尺。这是十进兼九进尺。横黍尺是将黍粒沿直线方向横排一百粒，一黍之广为一分，十分为寸，十寸为尺。此为十进制尺。历代尺长多变，但基本上可归结为上述3种类型。程氏所述"九十粒，一粒为一分，十分为寸"，属十进尺。但其基本单位积黍数是九十而非一百，当为汉尺九寸。

卷一所给度的单位：丈、尺、寸、分、厘、毫、丝、忽均为十进。又记有：四丈为一匹，五丈为一端。

《汉书·律历志》称"量者本起于黄钟之龠"，又云"千有二

百实其龠”，“合龠为合”。此是以一千二百粒中等黍的体积为量的基本单位，龠至合为二进，合以后从十进。《说苑》则称“十龠为一合，十合为一升，十升为一斗，十斗为一斛。”程氏所述“黄钟生量”与《说苑》相同，只是把龠改为勺。事实上，龠作为量的名称，东汉以后已废弃不用而以勺代之。

卷一所给量的单位：石、斗、升、合、勺都为十进，均如上所述。但接着又说：十抄为一勺，十撮为一抄，十圭为一撮，六粟为一圭。此说与《孙子算经》卷上所述一致，量的标准却与“黄钟生量”相异。另外，程氏所述量的单位还有一斛为五斗或二斗五升，一釜为六斗四升，一庚为十六斗，一秉为十六斛。

卷首“黄钟生衡”中，程氏所引衡之名称与《汉书·律历志》五权之名皆同，它以一千二百粒中等秬黍为勺，重十二铢，二勺重二十四铢为两，十六两为斤，三十斤为均，四钧为石。这与《孙子算经》卷上关于“称”的记载是一致的。

卷一又给出了衡的单位及其相互关系：一斤为十六两，一两为二十四铢，一铢为十絫，一絫为十黍。一秤为二十斤（或三十斤），一钧为二秤，一石为四钧，一引为二百斤。两下又有钱、分、厘、毫、丝、忽。引又有大引和小引，一大引为四百斤，一小引为二百斤。

程氏在卷一中所述度量衡即为明代之制。明代的度量衡多沿用唐宋旧制，在实施中各地却不完全一致。故程氏说“今世俗尺度不等，无物可为定则”。《明史·食货一》也称“步尺参差不齐”。出现这种现象的原因并非由于制度大小不同，而是因为增益所致。王国维说：“自唐迄今，尺度所增甚微，宋后尤微，求其原因，实由魏晋以降，以绢布为调，官吏俱其短耗，又欲多取于民，故尺度代有增益”①。

---

① 吴承洛．中国度量衡史．上海：上海书店，1984．219～220

亩　法

《算法统宗》卷一所载地积名称包括两个系统，一个是亩分厘法：顷、亩、角、分、厘、毫、丝、忽；另一个是步分厘法：里、步、分、厘、毫、丝、忽。在这两个系统中，分以下皆从十进。所不同的是，在亩分厘法中，分为十分之一亩，而在步分厘法中，分为十分之一步。亩法二百四十步自秦至清历代未改。而自唐代将步法改为尺后，遂为定制，沿用至清。

明神宗万历六年（1578 年），内阁首辅张居正（1535～1582）下令全国清丈土地，“天下田亩通行丈量，限三载竣事”，“然居正尚综核，颇以溢为功，有司争改小弓以求田多，或掊克见田以充虚数”[①]。《算法统宗》卷三休宁县科则、亩法论及古今折步法 3 节所记载的万历九年清丈土地的一些情况与此相符。特别是古今折步法一节，以当时丈量所用钞弓与古弓对校，算得钞弓 100 方步仅为古弓 92.16 方步，并推得钞弓每 100 方步约加 8.5 方步才实得古弓 100 方步。这一结论与《明史》所载一致。程大位可能参加过此次丈量工作，其丈量步车可能即完成于该时。

钱钞与银

《算法统宗》卷一“钱钞名数”称“钱钞之法谓之文，一文之上有十文，十十为百文，十百文为千文，千文为一贯，五贯为一锭。一文之下亦有分、厘、毫、丝、忽之数。”它说明了钱钞的单位及其相互关系。明初货币主要有铜钱和纸币两种。明太祖即位后，于 1374 年，设立宝钞提举司，次年发行“大明宝钞”。大明宝钞有 6 个单位，一贯宝钞等于铜钱 1 000 文，或银一两，或金四分之一两。明初禁止用金银作为交易媒介。商税则百分之三十用铜钱，百分之七十用宝钞交纳。1385 年官俸也改以宝钞发给。虽一再申令禁止用金银交易，但实际并未能严格执行。宝钞的比价

---

① 《明史》卷七十八. 食货一. 二十五史本.

愈来愈低。在1375年银一两合钞一贯，至14世纪末，折合35贯，15世纪初折合80贯，15世纪中则超过1 000贯。16世纪以后，宝钞已不再通行。《算法统宗》卷四有算题为：

“今有纱一十二匹二丈六尺，每匹四丈二尺卖钞二百六十五贯。问：每尺该钞若干？”

又有“今有银二十六两五钱，买纱每匹长四丈二尺，价银五钱。问：该买纱若干？”

由以上两题可知，一两银合钞五十三贯。这也从侧面反映了上述事实。

约在1436年，有大部分的田赋已折银交纳，这些银子被称为金花银。此后，金银（特别是银）作为交易媒介和支付工具便逐渐流行。万历九年（1581年）在全国推行一条鞭法，计亩征银，并以银代役，扩大了货币的流通领域，银作为货币已很普遍。《算法统宗》中所列算题的物价及交易大都用银，这也证实了上述事实。

流通的银往往成色不同。《算法统宗》卷二“倾煎论色”条目中，给出了6个算题，如：

“假如今有足色纹银三十五两二钱，欲倾八八色银。问：用银若干？”

“假如有铜七钱五分，今煎作八八色银，问：纹银若干？”

通过这些算题，我们不仅可以了解到当时流通中银的成色的多样性及不同成色间的换算，而且还可以了解到制造某一成色银的方法。在实际交换中，不同成色的银必须有一个计量的标准，方可作为流通媒介。至清末，逐渐形成三种测量银子成色的标准：库平、漕平和海关两。

赋　役

据《明史·食货二》“赋役之法，唐租庸调犹为近古。自杨炎作两税法，简而易行，历代相沿，至明不改。……租曰夏税，曰秋粮，凡二等。夏税无过八月，秋粮无过明年二月。”明初夏税、

秋粮之品目，仅米麦、钱钞和绢三项。至明代中期，增至四、五十项之多。科则除官田不同，又多例外。《算法统宗》虽写于明末，但对上述事实也有所反映。卷三记有：

“田亩起科等则（每斗加耗七合，地山同）：

田每一亩古科：米共五升三合五勺，带耗；

麦共二升一合四勺，带耗；

地每一亩古科：米共三升三合一勺，带耗；

麦共二升一合四勺，带耗。

新科：米共三升八合七勺一抄三，带耗；

麦共一升九合八勺七抄，带耗。”

卷五记有：“今有夏税麦二百七十四石，三限催征，初限五分，六月完；中限三分半，七月完；末限一分半，八月完。”

卷二记有“……秋粮米二万三千四百五十七石九斗，每石科银七钱”，又“今有官田一顷三十八亩，每亩科正米二斗”。

两税法发展到明代中期，其混乱与复杂已到极点，终于在嘉靖万历年间，被“一条鞭法”所取代。《明史·食货二》载“一条鞭法者，总括一州县之赋役，量地记丁，丁粮毕输于官。一岁之役，官为佥募。力差，则计其工食之费，量为增减；银差，则计其交纳之费，加以增耗。凡额办、派办、京库岁需与存留、供亿诸费，以及土贡方物，悉并为一条，皆计亩征银，折办于官，故谓之一条鞭。立法颇为简便。嘉靖间，数行数止，至万历九年乃尽行之。”

田赋的科征基准，主要是视田土的等则和面积，但户则也是一个重要的基准。明代税粮之收解，实行民收民解制，派粮之际，仓口有轻重：上户纳重，输于较远的粮仓；下户纳轻，输于附近的粮仓。这些事实在《算法统宗》中均有反映。

由于一条鞭法“计亩征银”，拥有众多人丁、事产的上户，多勾结官吏，私改户口和田土册籍，或以大尺代小尺。这种现象在

《算法统宗》中也有反映。

一条鞭法以银代役，以银代粮，简化了赋役，解放了劳动力，又反映了社会经济及货币的发展程度。

物质的比重

《算法统宗》卷一“诸物轻重数”相当于给出了一些物质的比重。如每立方寸：金重十六两，银重十四两，玉重十二两，铅重九两五钱，铜重七两五钱，铁重六两，青石重三两。

这与《孙子算经》卷上所载相同，只是银原为白金、青石原为石。在《孙子算经》之前，《汉书·食货志》、《九章算术》等都提到金、银、玉、石等4种比重，数据与《孙子算经》不同。据此，《孙子算经》所记10种物质的比重值可能是其所在时代的实测值。今据吴承洛《中国度量衡史》将7种物质比重值折算为厘米克秒制，东晋(317～420)：1尺＝24.45厘米，1两＝13.92克，1斤＝222.73克，则各物持比重值为：

黄金：15.24 克/厘米^3　　白金：13.33 克/厘米^3

玉：11.43 克/厘米^3　　铜：7.14 克/厘米^3

铜：9.05 克/厘米^3　　铁：5.71 克/厘米^3

石：2.86 克/厘米^3

这7种物质的比重与实测值相比有一定误差，但仍是明代以前关于比重的比较全面的记载。

物价及诸物比率

《算法统宗》中记载有许多物质的价格及其比率，今统计列表如下：

1. 物价表

物质	价格（银）	物质	价格（银）
苧麻	0.25 钱/斤	麦	4.5 至 8.5 钱/石

物质	价格（银）	物质	价格（银）
猪肉	0.21 至 0.25 钱/斤	豆	2.33 至 4.5 钱/石
铜丝	2.4 钱/斤	米	3 至 9.2 钱/石
绢	13.5 至 54 钱/匹	罗	12.75 至 30 钱/匹
缎	46.67 钱/匹	绫	27.4 至 36 钱/匹
纱	5 钱/匹	布	2.4 至 5.65 钱/匹
大绿	7.65 钱/斤	白铜	2.3 至 2.8 钱/斤
墨	3.12 钱/斤	木香	3.6 钱/斤
胡菽	1.42 钱/斤	心红	3.8 钱/斤
大青	20 钱/斤	杏仁	5.2 钱/斤
黄蜡	0.089 钱/两	水银	0.185 钱/两

说明：上述物价凡为不尽小数者，最后一位均为由四舍五入而得。

2. 诸物的对换表

菜籽 250 斤换油 88 斤	芝麻 1 斗换麻油 7 斤
枣子 1 斤换栗 2.4 斤	生漆 1 斤晒熟漆 0.4 斤
棉花 8 斤 12 两换布 1 匹	绫 7 尺换罗 9 尺
米一石折丝一斤	银 5 两换金一两

3. 诸事（物）的比率表

率之名称	率值	率之名称	率值
谷出米率	5 斗/石	芝麻出油率	45 斤/石
丝出绢率	4 丈/斤	麦出面粉率	71.4 至 74.5 斤/石
织布速度	8.25 尺/日	糙米出白米率	8 斗/石
食盐重率	40 斤/立方米	人日工程量	200 至 400 立方尺/日
船日行率	70 里/日	马日行率	120 里/日

另外，卷四“诸物率数”记有：粟率 50，稻率 60，粝率 30，粝饭 75，粺米 27，御米 21，御饭 42，粺饭、大面各 54，小面 13.5，糳米 24，豉 63，麻、麦、菽各 45。此与《九章算术》所述基本相同。

第二节 《算法统宗》中珠算算法的应用

比例的应用

《算法统宗》中的比例问题主要集中于卷二、卷四、卷五及杂法中。

正比例

正比例的题目较多，其求解方法与《九章算术》是一致的。值得一提的是：

（一）卷四“官粮带耗”（即依例应纳田租外，附加一定数量之损耗）中有题为：“今有正米二百一十二石，每石加耗七升。问该耗米若干？”“术曰：置正米为实，以耗七升为法，因之即得。”这类问题的计算实属百分比的计算。

（二）《算法统宗》将今有术用“异乘同除互换用法图”表示，以便学者记忆使用。

（三）《算法统宗》卷四“就物抽分”中有3个算题，同属《九章算术·盈不足》“漆三油四”算题类型，但解法不同，前者用今有术求解，今将其中一题摘录如下：

“今有白绫六十七丈五尺，于内抽一丈七尺五寸买颜色作染，只染得红绫六丈二尺五寸。问：各该若干？”

（四）重今有术：《算法统宗》卷四“谷米麦麻金”第6问为：“今有芝麻四百五十六石，易换米豆。只云芝麻三斗换米五斗，米五斗换豆七斗。问：米豆各若干？”“术曰：置芝麻为实，以三斗归之得一百五十二石，以米五斗因之，得米七百六十石。若换豆就以米用五归之，仍得一百五十二石。以豆七斗因之，得豆一千零六十四石。”其解法与《九章算术》均输章“络丝练丝”题相同，用重今有术。

反比例

《算法统宗》卷二“同乘异除”为反比例问题，有算题：“假如原有小珍珠五十颗，重一两，价银一十两。今有大珍珠三十颗，重一两。问：该银若干？”这里颗数与价格成反比。

复比例

《算法统宗》卷二“差分”第4题为“假如今有人借去银二百六十两，每年加三起息。今有十个月二十四日。问：该利银若干？”是一复比例问题，钱数与日数均与利息数成正比。

“差分”第6题则为用复比例反求原本钱问题：“假如人借去银，每年每两加利二钱七分，今有一年零三个月二十日，收还银三百六十二两四钱七分。问：本、利各若干？”

“差分”第7题难度更加一层：“假如原借本银一十五两，每月加利二分五厘。今有六个月，已还过银九两，除作本及利。问：本利各该若干，仍存原本若干？”。

卷二“异乘同除”也为复比例，与《九章算术·均输》“取佣负盐”题同类。

连比例

《算法统宗》卷二“同乘同除”为连比例问题。有算题：“假如原有鹅八只换鸡二十只，每鸡三十只换鸭九十只，每鸭六十只换羊二只。今却有羊五只换鹅。问：该若干？”

“法曰：用异乘同乘法。置原鹅八只。乘以原鸡三十只，得二百四十只。又以原鸭六十只，乘之，得一万四千四百只，再以今有羊五只乘之，得七万二千只为实。又用异除同除之法，以所换鸡二十只，乘换鸭九十只，得一千八百只。再以所换羊二只因之，得三千六百只为法，除实，得鹅二十只。合问。”

由题意，鹅∶鸡＝8∶20，鸡∶鸭＝30∶90 鸭∶羊＝60∶2。程大位的作法为8，30，60，5四数相乘为实，20，90，2三数相乘为法，相除即得。这种求法较《九章算术》有所发展，实与《数书九章》的雁翅法相同。

《算法统宗》中还有许多连比例问题，如卷五“三七差分”中有算题：“今有银四百九十七两七钱，令甲乙丙三人三七分之。问：各若干？”其意为：甲∶乙＝7∶3，乙∶丙＝7∶3，故甲∶乙∶丙＝49∶21∶9。“六四差分”“二八差分”“折半差分”等方法同理。

配分比例

(1) 按比例分配。如卷二“差分”第2题：“假如今有元、享、利、贞四人合本经营，元出本银二十，两享出本银三十两，利出本银四十两，贞出本银五十两，共本一百四十两。至年终共得利银七十两。问：各该利银若干？”

此题与《九章算术·衰分》第1题设题与解法都相同。

《九章算术》有反衰问题，其实质为各衰为分数的衰分问题。《算法统宗》卷五有“带分母子差分”问题，如“今有马军七人，给裤布四十八尺，步军六人给袄布九十二尺。今共给布一十二万

五千八百二十尺。问：各若干?”给出各衰为48/7和92/6，转化为整数48×6和92×7。

（2）按加权比例分配。

《九章算术·均输》第1题为按加权比例分配问题，各衰既与道里远近有关，又与户数多少有关。《算法统宗》卷九亦此类问题有：

“今有五县输粟二万石，照人户多少、道里远近、价值上下而均输之，每车载二十五石，行道一里，与僦里钞一钱。甲县二万零五百二十户，粟石价二两；乙县一万二千三百一十二户，粟石价一两，远输所二百里；丙县七千一百八十二户，粟石价一两二钱，远输所一百五十里；丁县一万三千三百三十八户，粟石价一两七钱，远输所二百五十里；戊县五千一百三十户，粟价一两三钱，远输所一百五十里。问：各输粟若干?”

《算法统宗》“递减换次差分”有算题：“今有米二百四十石，令甲乙丙丁戊五个分，要将甲乙二人数与丙丁戊三人数同。问：各该若干?”其解与《九章算术·均输章》“五人分钱”题同。

差分的应用

匿价差分

卷五有“匿价差分”，是为已知两物的共价共物及两物多少与单价之差，求各物单价问题。如该类第1问为：“今有银一万七千六百九十两，买马骡一千匹，议要马七百匹，骡三百匹，其马价多骡价七两七钱。问：各价若干?”“术曰：置马七百匹以多七两七钱乘之，得五千三百九十两，以减总银，余一万二千三百两，以马骡一千为法，除之，得骡一十二两三钱，加多七两七钱为马价。”

其解法十分简单：骡价$=\frac{17\ 690-700\times 7.7}{1\ 000}$两，再加7两7钱即为马价。解法原理不言自明。

《九章算术·粟米》其率术为在“共物共价”问题中，按单价之不足与过剩两种不同价格来分配物品数量。由于单价之不足与过剩（整）值之差恒为一，故这种算法只须应用简单的带余除法便可唯一的确定。如粟米章第38题：“今有出钱五百七十六，买竹七十八个。欲其大小率之。问：各多少？”其解法为$576\div78=7\times\frac{30}{78}$，又因为大竹比小竹多1钱，故大竹30个，每个8钱，小竹$78-30=48$个，每个7钱。显然，上述两例是同一问题，其求解法都用除法。“匿价差分”更一般化。

“匿价差分”还有一类是如下的问题：“今有金九块，银十一块称之适等。交换二十块，则余金比换银多一十三两。问：金银各重若干？”此题即为《九章算术·盈不足》第18题，《九章算术》用盈不足术求解，现代人往往用方程术，而程大位却把它归入“匿价差分”，用四则运算求解，抓住了问题的关键。程氏的解法为：“列金重一十三两，折半得六两五钱，乘金九块，得五十八两五钱为实，却以金九银十一相减，余二为法，除实，得银一块重二十九两二钱五分数。”

因为交换两块后，余金比换银多一十三两，故一金比一银多$\frac{13}{2}$两。从而九金比九银多$\frac{13}{2}\times9$两，这正是二银之重量（因为九金与十一银重量相等），所以一银重为$\frac{13}{2}\times9\div2$两。再加$\frac{13}{2}$两即为一金重。

贵贱差分

卷五“贵贱差分”问题为：已知甲物单价，乙物单价，又知共价买共物若干，求甲、乙物各几何的问题。《九章算术·盈不足》第13题为此类，用盈不足术求解。《算法统宗》则用四则运算更加简便。如该类第1问为：“今有米麦五百石，共价银四百零五两七钱，只云米每石价八钱六分，麦每石价七钱二分五厘。问：

米麦各若干?"

"术曰：置米麦五百石，以米价八钱六分乘之得四百三十两，减去共价，余二十四两三钱为实，以米价内减麦价余一钱三分五厘为法，除之，得麦一百八十石。却以米麦五百石内，减麦数，余三百二十石为米数，各以原价乘之，合问。"其求解步骤与解方程相似，却不用方程。实为《张丘建算经》卷中第 18 题之解法。

此后，《算法统宗》又进一步推广，给出三色差分问题："今有银五十五两五钱，共买铜锡铁八万三千零五十两。只云银价相仿，每银一钱买铜一百三十两，每银一钱买锡一百五十两，每银一钱买铁一百七十两。问：三色各若干?"

此题的前提条件为铜、锡、铁三物所用钱数成等差数列，故置银 55 两 5 钱除以 3，即为锡所用钱。再乘以锡单价，即得锡重。从总重及总钱中减去锡重及锡用钱数，即可转化为贵贱差分问题。这正是程大位的解法（若仅从题意认为此类问题为不定方程，误也!）。最后，程大位又将三色差分推广："诀三色四色差分之法，俱先定中等，唯留首尾二色，以贵贱差分算之。不拘五六七八九色者仿此。"

由于在实际运算时物价并不一定全为整数，有时也为分数，但分数用算盘表示多有不便，为简化运算，《算法统宗》又给出比贵贱差分更一般的问题——"仙人换影"：设甲物为 a，值钱 b，乙物为 c，值钱 d，共钱为 m，共买物为 N，求甲乙二物各几何，并值钱各几何?

易知甲物之单价为$\frac{b}{a}$，乙物单价为$\frac{d}{c}$。为避免分数，程氏用相当于令甲物数为 ax，乙物数为 cy，即可转化为贵贱差分。求出 x 后乘以 a，即得甲物数，其中 x 称为"短法"，这相当于今之代换法。

《九章算术·盈不足》第 20 题"持钱之蜀"题其求解用盈不

足术。《算法统宗》卷五“仙人换影”中有一题与此相似，但解法不同。其题目为：“今有客三次出外为商俱得合利，每次归还银三百两，三次本利恰尽。问：原本若干？”其解法为$\frac{1}{2}$ [$\frac{1}{2}$ ($\frac{300}{2}$+300) +300] =262 两 5 钱，这实际上是解一元一次方程：2 [2 ($2x-300$) −300] −300=0，继承了刘徽的求解方法。

“仙人换影”石中有玉题与《九章算术·盈不足》第 16 题同，但解法前者用仙人换影，后者用盈不足术。

数列的应用

等差数列

《算法统宗》有关等差数列问题多与配分比例问题相联，从书中所给算题看，程氏对等差数列的前 n 项和公式及通项公式已十分熟悉，对 $d>0$ 和 $d<0$ 的情况均有算题。今举例如下：

①卷五有算题：“今有俸粮三百零五石，令五等官依品递差十三石分之。问：各若干？”

“术曰：置五等于上，又列五等减一余四，以乘五，得二十，折半，得一十为实。以每等差十三石乘之，得一百三十，以减总粮三百零五，余一百七十五石，却以五等除之，得三十五石，是第五等。”

其解含有公式：$a_n=a_1+(n-1)d$

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)\cdots\cdots+[a_1+(n-1)d]$$

$$a_1=\frac{1}{n}[S_n-\frac{n(n-1)}{2}d]$$

这最后一个公式即为前 n 项和公式：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

②卷五：有七人差等均钱。甲乙均七十七文，戊已庚均七十五文。问：丙丁各若干？”

其解法为：$\frac{a_1+a_2}{2}=a_1-\frac{d}{2}=\frac{77}{2}$

$$\frac{a_5+a_6+a_7}{3}=a_6=a_1-5d=\frac{75}{3}$$

$$d=\left(\frac{77}{2}-\frac{75}{3}\right)\div 4\frac{1}{2}=3$$

由此可见，程氏对在等差数列中 $a_m+a_n=a_s+a_t$，其中 $m+n=s+t$，m，n，s，$t\in\mathbf{N}$ 这一关系已经很熟练。此题与《九章算术·均输》第 19 题相似，解法相同。

③卷五有“今有白米一百八十石，令三人从上互和减半分之。只云甲多丙米三十六石。问：各该若干?”此题即为已知 S_3，a_3-a_1，求 a_1，a_2，a_3

其解法为：$a_2+a_1=\frac{S_3}{3}\times 2$，由此再求 a_1，a_2，a_3。

④卷九有“今有众兄弟辈出钱买物，长兄出钱八文，次兄以下各加一文，顺至小弟出钱六十文。问：兄弟弟辈及共钱各若干?”

“法曰：以八文并入六十文共得六十八文。另置六十文于内减去八文，余五十二文，再加长兄一人共得五十三人。另以六十八文乘五十三人，得三千六百零四文，折半，即得”。

此术文给出公式：$S_n=\frac{n\ (a_1+a_n)}{2}$

⑤卷九有“今有中试举人壹百名，第一名官给银一百两，自第二名以下挨次各减五钱。问：该银若干?”

“法曰：置一百名减去第一名余九十九名，以五钱乘之，得四十九两五钱，以减一百两余五十两零五钱为第一百末名之数。并入第一名给一百两共一百五十两零五钱，以乘一百名，得一万五千零五十两，折半，合问。”

此解法含有公式 $a_1=a_n-\ (n-1)\ d$，$S_n=\frac{(a_1+a_n)\ d}{2}$

等比数列

卷九有“今有钱一文，日增一倍，倍至三十日。问：该若干?”

“法曰：置钱一文以十度八因即得。一度八因乃三日倍数，十

度八因乃三十日数。

一法：（置钱一文）以五度六十四乘亦得。一度六十四乘乃六日倍数，五度六十四乘是三十日数。

又法：（置钱一文）以三度三十二乘得数，自乘亦得。三度三十二乘乃十五日数，自乘即三十日也。”

此题相当于：在等比数列中，已知 a_1，q，n，求 S_n。

术文给出解法含有如下结果：

若 $\{a_n\}$ 以公比为 q 的等比数列，则 $\{a_{kn}\}$ 是公比为 q^k 的等比数列。

束法

卷六给出方束、圆束及三棱束之计算方法。束法不载《九章算术》，始见于《孙子算经》卷下。至元朝《四元玉鉴》逐渐有所发展。《算法统宗》所载束法问题有两类：一类是已知方束、圆束和三棱束总数，求外周数；另一类是已知方束、圆束和三棱束之外周数，求总数。

方束有两种，一种为有中心，另一种为无中心。它们分别相当于下列两个数列：

1，8，16，24…，

4，12，20，28，…。

第一个数列除第一项外，构成一个首项为8，公差为8之等差数列。第二个数列是首项为4，公差为8之等差数列。这两个数列均用下列公式求和：

$$S_n=\frac{a_n}{8}\cdot\frac{(8+a_n)}{2}+1=\frac{a_n\ (8+a_n)}{16}+1$$

其中16称为方束法。如已知数 S，求外周 a_n，可由 $a_n\ (8+a_n)=16\ (S_n-1)$ 开带从平方获解。

圆束相当于数列：1，6，12，18，…，除第一项之外，构成一首项为6，公差为6之等差数列。求和公式为：

$$S_n=\frac{a_n}{6}\cdot\frac{(6+a_n)}{2}+1=\frac{a_n\ (6+a_n)}{12}+1$$

其中 12 称为圆束法。由总数 S 求外周 a_n，须由 $a_n\ (6+a_n)=12\ (S_n-1)$开带从平方。

三棱束亦分两种，一种为有中心，一种为无中心，分别相当于下列两个数列：1，9，18，27，…，

3，12，21，30，…，

第一个数列除第一项外，构成一首项为 9，公差为 9 之等差数列。第二个数列是首项为 3，公差为 9 之等差数列。这两种数列均用下列公式求和：

$$S_n=\frac{a_n}{9}\cdot\frac{(9+a_n)}{2}+1=\frac{a_n\ (9+a_n)}{18}+1$$

其中 18 称为三棱束法。由总数 S 求外周 a_n，须用 $a_n\ (9+a_n)=18\ (S_n-1)$ 开带从平方。程氏只涉及有心三棱束之计算。

垛　积

垛积，亦称堆积，是中国数学的重要组成部分之一。其原意是计算按一定规律堆放的物体总数，相当于数列求和问题。自元朝以来，又出现了已知物体总数反求堆放的层数或底层数，相当于由和求数列项数或末项。这两项内容是垛积术的基本内容。《九章算术・商功》用刍童术计算草垛体积，是时尚未计及草束之总数，刍童术即垛积术之萌芽。以刍童术求刍童状垛积的物体总数，失之于少。有鉴于此，沈括有隙积术（见《梦溪笔谈》卷十八）是为垛积术之创始。朱世杰《四元玉鉴》果垛叠藏等门论三角垛、四角垛及可由该两垛导出的岚峰形垛，有求总数，有求项数，使垛积术系于贾宪三角形，是为垛积术之发展。《算法统宗》卷八又丰富了这一内容。今举例说明如下：

①“今有酒瓶一垛，底脚阔八个，长一十三个，该积若干?”

此垛即杨辉《详解九章算法》中的果子垛，也称四角长垛。它相当于下列数列的求和：

1. a，2. $(a+1)$，3. $(a+2)$，…，n. $[a+(n-1)]$，…其中底脚阔 n，底脚长 $[a+(n-1)]$，高与底脚阔相等。术文给出的求和公式相当于：

$$S_n=\frac{1}{3}n(n+1)\left\{\frac{[a+(n-1)]-n}{2}+\frac{1}{2}+[a+(n-1)]\right\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2[a+(n-1)]+a\}$$

②"今有物靠壁，一面尖锥底脚阔一十八个。问：积若干？"

此题相当于求这样一个数列的和：

1，2，3，…，n，…

程氏借用梯田公式求出其和为 $S_n=\frac{1}{2}n(n+1)$

对于"平锥"（即顶层不只一个）求法同理。

③"今有三角果一垛，底阔每面七个。问：该若干？"

此三角果垛即为下列数列求和：

1，3，6，10，…，$n(n+1)/2$，…

其和 $S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$。此垛已见于《详解九章算法》鳖臑比类。

三角半锥果垛解法同理。

④"今有物四面尖锥底阔一十二个。问：该若干？"

此为下列数列求和：

1^2，2^2，3^2，…，n^2，…

$S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$

此垛已见于杨辉《详解九章算法》方锥比类。

⑤"今有半堆酒瓶一栈，上长二十五个，阔一十二个；下长三十个，阔一十七个，高六个。问：积若干？"

此给出下列数列求和：

ab，$(a+1)(b+1)$，$(a+2)(b+2)$，…，$[a+(n-1)][b+$

$(n-1)]$，…

$$S_n=\frac{1}{6}\ [\ (2a+c)\ b+\ (2c+a)\ d]\ n+\frac{1}{6}\ (d-b)\ n$$

其中 a，b 分别是上长与上阔：$c=a+(n-1)$，$d=b+(n-1)$ 分别是下长与下阔，n 为高。此垛求和公式为沈括首创，后又见于《详解九章算法》刍童比类。

面积与体积的计算

平面图形的面积

卷三及卷十三都有关于平面图的面积计算问题。它涉及到的平面图形较《九章算术》要多且复杂。《九章算术·方田》有方田、圭田、邪田、箕田、圆田、宛田、弧田、环田等。而《算法统宗》除此之外，还有覆耳田（半圆）、梭田（菱形）、眉田、牛角田、榄形田（两个弧田）三广田（两个等腰梯形）、鼓田、杖鼓田、箭筈田、箭翎田、句股田、四不等田、五不等田、倒顺二圭形、三圭形、六角形、八角形、钱田、锭田等等。在这些面积的计算中，首先《算法统宗》继承了《九章算术》中的面积公式，并将《算法统宗》之前的有关面积计算进行了系统总结（如吸取了《九章算法比类大全》中的许多平面图形），应用于更广泛的实际测量中，(包括求积与反求)；其次面积计算的精髓——出入相补（多边形）、以直化曲（曲边形）得到很好地继承和发扬。正如程大位在卷三之首所述“田之形状甚多，其载难尽，学者不必执泥，在于临场讥（机）变，必须截盈补虚，俾尖减大，以合规式。但田中尖，先取出方、直、勾股、圭、梭等形，另积旁余并而于一，然后用法乘除之。”从该书中所列图表，我们也可以窥见一斑。再次，《算法统宗》对一些几何概念较《九章算术》讲述得更明确，如三角形田在《九章算术》中只有圭田，且形状不十分明确；《算法统宗》中将三角形田分为圭田（等腰三角形）、三角田（等边三角

形）、斜圭田（一般三角形）、勾股田（直角三角形），每种田都有明确的数据和图形。

勾股田的求积

卷三有许多算题是已知勾股形的某些边或边的关系，求勾股形的面积的问题。其求解过程包含有许多代数变换，主要有以下几个类型（a，b 对换看作同一类）：

①已知 $a+b$，c，求 ab。

解法：$ab=\frac{(a+b)^2-c^2}{2}$

②已知 $a+c$，b，求 a。

解法：$a=\frac{(a+c)^2-b^2}{2(a+c)}$

③已知 $b-a$，c，求 ab。

解法：$ab=\frac{1}{2}[c^2-(b-a)^2]$

④已知 a，$c-b$，求 b。

解法：$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}$

立体图形的体积

卷八为商功，主要讲述与工程有关的体积算法。该卷所述“穿地四尺，为壤五尺，为坚三尺”与《九章算术·商功》所述相同。所述立体图形有：城、垣、沟、方台、圆台、刍童、方锥、圆锥、方堡，刍甍、羡除、堤等，其体积算法均从《九章算术》，只将体积公式直接应用，无公式证明。卷四关于粮仓的计算，又给出了倚壁（半圆锥）、内角（1/4 圆锥）、外角（3/4 圆锥）、船仓等立体图形。船仓的体积计算不载《九章算术》，始见于徐心鲁的《盘珠算法》。另外，算题“今有芦席二领长阔相同，先以席一领作囤较之，盛米二石五斗。问：二领为一囤盛米若干？”“术曰：置席二领自乘，得四领为实，以较囤米二石五斗为法乘之，合问。”

此题算法含有如下定理：

圆柱体（长方体），若其一周长为另一周长之 k 倍时，则前者体积为后者体积 k^2 倍。

截　积

（一）分田截积

所谓分田截积，是指将已知图形依给定条件分割为若干部分，并求出各部分图形的未知元素。《九章算术·少广》前 11 个问题均为此类题，但图形只涉及长方形，问题比较简单。《算法统宗》则综合了前人的已有成果（主要是《田亩比类乘除捷法》和《九章算法比类大全》），进行了较为详细的论述。今分析如下：

直田截积：已知直田的长和阔，从中截取一个已知面积，主要截法如图 6.2.6，虚线为截线，x 为未知，均为直田、梯田、勾股田、圭田面积公式的反求问题，较简单。

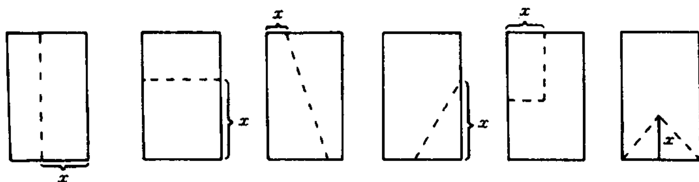


图 6.2.6

勾股截积：用该书中的典型例子来说，有以下几类：

①"今有勾股田，长三十步，阔一十五步。今从尖截长一十二步。问：中广若干？"

用图 6.2.7 中两个阴影勾股形的相似来求解。

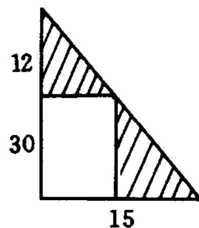


图 6.2.7

②"原有斜田南广四步，北广十步，长一十二步。今欲增作勾股样式。问：股长出若

干?”

用图 6.2.8 中两个阴影勾股形的相似来求解。

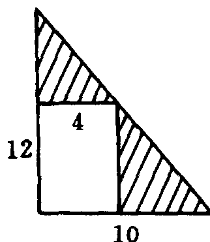


图 6.2.8

③“今有勾股田，股长四十步，勾阔二十步，今从大头截积一百七十五步。问：所截长阔各若干?”

“术曰：先将勾股相乘折半，得积四百步。减截积一百七十五步，余积二百二十五步。以作圭田截积小头知而算。置小头积二百二十五步，倍作四百五十步，以原长四十步乘之，得一万八千步，以原阔二十步除之，得九百步为实，以开平方法除之，得上尖长三十步。就以此为法，以除倍积四百五十，得截阔一十五步。”

如图 6.2.9：Rt$\triangle ABC$ 为已知三角形，$AB=40$，$BC=20$，梯形 $B'BCC'$ 的面积为 175，则

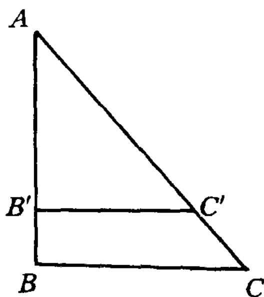


图 6.2.9

$$\triangle AB'C' \text{的面积} S_1=225$$

$$\text{又} S_1=\frac{1}{2}AB'\cdot B'C'$$

$$=\frac{1}{2}AB'\cdot\frac{AB'\cdot BC}{AB}$$

$$=\frac{1}{2}(AB')^2\cdot\frac{BC}{AB}$$

$$\text{所以，} AB'=\sqrt{\frac{2S_1\cdot AB}{BC}}=30$$

$$B'C'=\frac{450}{30}=15$$

圭田截积：同勾股截积。

斜田、梯田截积：主要有以下几种类型：

①“今有斜田南广四步，北广十二步，长三十二步。今从中截腰广六步。问：截南长若干?”

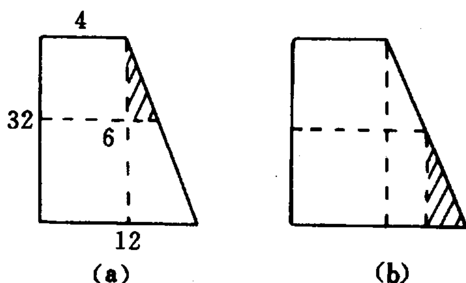


图 6.2.10

如图 6.2.10 (a)，用小勾股形与大勾股形相似推求。

若将“今从中截腰广六步”改为“截下长二十四步”，问：截中广若干？

用阴影勾股形与大勾股形相似推求，如图 6.2.10 (b)。

② “今有梯田长九十步，南广二十步，北广三十八步。今自南边小头截积八百二十二步五分。问：截长各若干？”

此题见于《田亩比类乘除捷法》卷下，杨辉解法原有“先求长术”与“先求阔术”两种，程氏所用只为后一种。该法见图 6.2.11，可作如下解释：

$$S_{AEFD}=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot DG-\frac{1}{2}(EF+BC)\cdot HG$$

由相似勾股形可得 $HG=\dfrac{(BC-EF)\cdot DG}{BC-AD}$

于是 $S_{AEFD}=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot DG-\frac{1}{2}(EF+BC)\cdot$

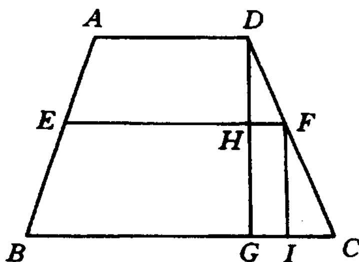


图 6.2.11

$\dfrac{(BC-EF)\cdot DG}{BC-AD}$

即$S_{AEFD}=\dfrac{EF^2-AD^2}{2(BC-AD)}\cdot DG$

$$EF=\sqrt{AD^2+\frac{2S_{AEFD}(BC-AD)}{DG}}$$

若自大头截，方法同理。

环田截积：可分为“环截外周”与“环截内周”。环截外周与梯田截大头解法相同；环截内周，只要用梯田面积减去内截面积即转化为一半共外周。

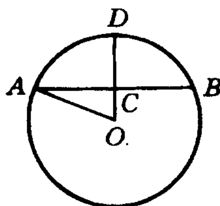


图 6.2.12

圆田截积：①已知圆田直径及所截弧矢田的面积，求弧矢田的弦及矢。

详见开方。

②已知圆田直径及所截弧矢田的弦长，求矢。

如图 6.2.12，$DC=DO-OC=OD-\sqrt{OA^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}$

若求弦同理。

③已知圆田直径，所截阴影部分的宽口圆心在正中间，求阴影部分的面积。

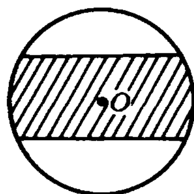


图 6.2.13

如图 6.2.13，用弧田公式和圆面积公式即可求得。

（二）体积截积

卷八载有体积截积问题，今分述如下：

筑墙高，问下广：如图 6.2.14，a，b，h 分别是筑墙的原上广、下广及高，h_1 为今高，x 为所求今上广。由相似勾股形，即直角三角形 ACE 相似于 FDE 可得：

$$\frac{h}{h_1}=\frac{\frac{b-a}{2}}{\frac{b-x}{2}}$$

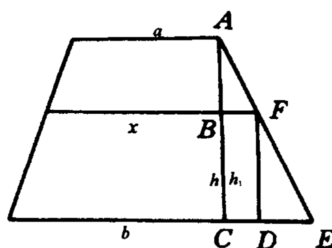


图 6.2.14

故 $x=b-\frac{(b-a)\ h_1}{h}$

筑墙截下广问高：如图 6.2.15，设 a 为原上广，c 为原下广，h 为原高，b 为下广。求高 x。由 Rt$\triangle ABC$ ∽Rt$\triangle DEC$

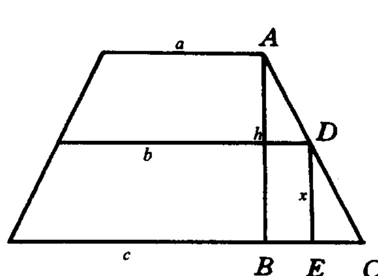


图 6.2.15

可得：$\frac{h}{x}=\frac{\frac{c-a}{2}}{\frac{c-b}{2}}$

故 $x=\frac{(c-b)\ h}{c-a}$

方锥截作方台：如图 6.2.16，方锥平截为两部分，上为方锥，下为方台。原高 $OC=h$，原下方之半 $CD=\frac{a}{2}$，上方半 $AB=\frac{b}{2}$，截高 $OA=x$，由 Rt$\triangle OAB$∽Rt$\triangle OCD$可得：$\frac{x}{\frac{b}{2}}=\frac{h}{\frac{a}{2}}$，故 $x=\frac{bh}{a}$

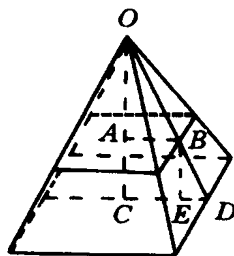


图 6.2.16

圆锥截作圆台同理。

方台改作方锥：如下页图 6.2.17，下为方台，上为方锥，$AC=h$ 为原高，$AB=\frac{b}{2}$ 为上方之半，$CD=\frac{a}{2}$ 为下方之半，$OA=x$ 为所求接高。由

$OA=x$ 为所求接高。由Rt$\triangle OAB$ ∽Rt$\triangle BED$ 得

$$\frac{x}{\frac{b}{2}}=\frac{h}{\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}$$

故　$x=\dfrac{bh}{a-b}$

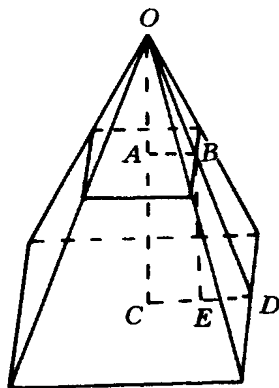


图 6.2.17

盈不足问题

卷十为盈朒，即盈不足问题。此类问题源于《九章算术》，是指算术中的盈亏类问题，其解法总称为盈不足术。《算法统宗》卷十作歌曰：

“算家欲知盈不足，两家互乘并为物。

并盈不足为人实，分率相减余为法。

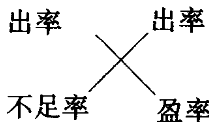
法除物实为物价，法除人实人数目。”

此歌所述一盈一不足术如下：

若有人共买物，人出 a_1 钱，盈 b_1；人出 a_2 钱，不足 b_2。问：人数、物价各多少？

“法曰：置所出率与盈不足，以盈不足互乘所出率，并之共若干，为物实。另并余不足，共若干，为人实。置所出率相减余若干为法。除人实，得人数。除物实，得物价。”即

物价$=\dfrac{a_2b_1+a_1b_2}{a_1-a_2}$，人数$=\dfrac{b_1+b_2}{a_1-a_2}$



其中 a_1，b_1，a_2，b_2 均大于零。

这与《九章算术》所述解法相同，只是比《九章算术》多了一个

图式。接着，《算法统宗》又讲述了两盈两不足、盈适足、不足适足等问题，其解法悉从《九章算术》。最后《算法统宗》提出了“双套法”：

若有人共买物，m 个人出 a_1 钱，盈 b_1；n 人出 a_2 钱，不足 b_2。问：人数、物价各多少？

则：物价$=\dfrac{ma_2b_1 \pm na_1b_2}{na_1 - ma_2}$，人数$=\dfrac{mn\ (b_1 \pm b_2)}{na_1 - ma_2}$

两式分子式取加号时为盈不足公式，取减号时为两盈、两不足公式。当 $b_2=0$ 时为盈适足、不足适足公式。此外，当 $m=n=1$ 时，即为前述盈不足公式。

程氏认为：“自刘氏《通明》、吴氏《比类》(即刘仕隆《九章通明算法》(1424 年)、吴敬《九章详注比类算法大全》(1450 年)) 始增双套”，实不然也。《九章算术》盈不足术、两盈、两不足术皆有“有分者通之”一语，是为双套盈不足之先声。如盈不足章第 4 题就是一例。“今有共买牛，七家共出一百九十，不足三百三十；九家共出二百七十，盈三十。问：家数、牛价各几何？”

可喜的是，程氏将双套法进行系统总结，分类举例说明，这较《九章算术》又有所发展。今就每一类各摘一例如下：

①一盈一不足：

“今有人买物，每八人出银七两，盈四两五钱；每九人出银六两，不足三两。问：人数、物价各若干？”

②两盈：

“今有人买物，每六人出银九两多三两；每四人出银七两多六两。问：人数、物价各若干？”

③两不足：

“今有官派银不知数，依例令上等八户，下等五户纳之，不足五两；复令上等六户、下等八户纳之，亦不足三两。只云下户例如上户例十分之八。问：派银数及各户则例若干？”

④盈适足：

"今有人买物，每三人出银五两多十两；每五人出银九两适足。问：人数、物价各若干?"

⑤不足适足：

"今有芝麻不知数，只云取麻八分之三粜银十两不足二石；取麻三分之一粜银八两适足。问：麻数及每两该银若干?"

《算法统宗》所述盈不足问题均为线性问题，故所求解均为精确解。但其应用的范围却不及《九章算术》广泛，只是就事论事。

勾股

解勾股形

已知直角三角形的某些边或某些边的关系，求这个直角三角形的三边长的问题称为解勾股形。

《算法统宗》卷三、卷六、卷十二、卷十三、卷十六都涉及解勾股形问题，主要有以下几种类型（a，b 交换看作同一类型）：

（1）已知 a，b，c 中任何两个，求另外一个，用勾股定理。

（2）已知 a，$c-b$，求 b，c。

解法：$b=\dfrac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}$，$c=b+(c-b)$

或 $c+b=\dfrac{a^2}{c-b}$，$c=\dfrac{(c+b)+(c-b)}{2}$，$b=c-(c-b)$

（3）已知 c，$b-a$。求 a，b。

解法：$b=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{2c^2-(b-a)^2}+(b-a)\right]$

$a=b-(b-a)$

（4）已知 b，$a+c$，求 a，c。

解法：$a=\dfrac{(a+c)^2-b^2}{2(c+a)}$，$c=(a+c)-a$

或 $a=\dfrac{1}{2}\left[(c+a)-\dfrac{a^2}{b+c}\right]$

(5) 已知c，$a+b$，求a，b。

解法：$b=\frac{1}{2}\left[(b+a)+\sqrt{2c^2-(b+a)^2}\right]$

$a=(a+b)-b$

(6) 已知$c-a$，$c-b$，求a，b，c。

解法：$b=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)$

$a=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-b)$

$c=(c-b)+b$

(7) 已知$a+c$，$b+c$，求a，b，c。

解法：$a+b+c=\sqrt{2(c+a)(c+b)}$

$a=\sqrt{2(c+a)(c+b)}-(c+b)$

$b=\sqrt{2(c+a)(c+b)}-(c+a)$

(8) 已知ab，$b-a$，求a，b，c。

解法：$a+b=\sqrt{4ab+(b-a)^2}$

$b=\frac{(a+b)+(b-a)}{2}$

$a=(a+b)-b$

《九章算法》已解决了前6种，《算学启蒙》又给出了第7种①，但未有证明。可见，程氏是对以前解勾股形作了总结。

方程

方程，相当于今之多元线性方程组的解法，它源于《九章算术》方程章。方程的解法通常称之为方程术。《九章算术》方程术采用直除法，刘徽于《九章算术》方程章第七题注中，将它发展为互乘相消法（即今之加减消元法）。秦九韶《数书九章》采用互乘相消法，并注意到约去互乘两数之最大公约数，使这一方法得

① 沈康身．中算导论．上海：上海教育出版社，1986．132

以完善。自此以后，中算家普遍采用互乘相消法。程大位《算法统宗》也采用这种方法，并将方程分为二色方程、三色方程、四色方程等类型，这种分类法已与今天之线性方程组的分类一致。因此，《算法统宗》之方程术已较《九章算术》大有发展。

二色方程

卷十一开始列有二色方程歌，说明了二色方程的求解方法。

二色方程歌：

“世人欲要识方程，物价俱将左右陈。
右上法乘左中下，次将左上右行乘。
中间相减余为法，下位相减余实情。
法除实为右中价，得价须将右中乘。
右下价内减去积，余为实数甚分明。
右上为法除下实，便为上价细推寻。”

由歌诀知道，其解法与今之解法相同。

卷十六“难题方程八”用诗歌的形式提问：

“今有布绢三十匹，共卖价钞五百七。
四匹绢价九十贯，三匹布价该五十。
欲问绢布各几何，价钞各该分端的。
若人算得无差讹，堪把芳名题郡邑。”

此题本可列式为：$\begin{cases} x+y=30 \\ \dfrac{90}{4}x+\dfrac{50}{3}y=570 \end{cases}$

为避免分数，程氏令 $4x'=x$，$3y'=y$，得

$$\begin{cases} 4x'+3y'=30 \\ 90x'+50y'=570 \end{cases}$$

使列式方便。

三色方程

三色方程歌：

三色方程法更奇，物价三行左作基。
左右互乘须减尽，中下价余左位宜。
又列二行仍乘减，中中左中减无余。
下余为法价余实，法实相除下价知。

歌中所述三元一次线性方程组的解法：列左、中、右三列，用互乘消元法消去一个未知数，转化为二色方程，按二色方程的方法求解即可。但在实际求解过程中，程氏并不严格按这种说法去做，说明了他对这一问题认识得深刻。今举一例分析如下：

“今有砚三个，墨五匣，笔九枝，共价八钱一分；又砚四个，墨六匣，笔七枝，共价八钱九分；又砚五个，墨七匣，笔八枝，共价一两零六分。问：砚、墨、笔各若干？”

用现代数学语言：设砚价为 x，墨价为 y，笔价为 z，依题意得：

$3x+5y+9z=81$　　（右）

$4x+6y+7z=89$　　（中）

$5x+7y+8z=106$　　（左）

程氏所述解法可改写如下：

“以右行砚三为法，遍乘左中二行”：

$3x+5y+9z=81$　　（右）

$12x+18y+21z=267$　　（中）′

$15x+21y+24z=318$　　（左）′

“以中行砚四遍乘右行”：

$12x+20y+36z=324$　　（右）′

“与中行对减”〔（右）′－（中）′〕：

$2y+15z=57$　　（另列右位）

“以左行砚五为法遍乘右行”：

$15x+25y+45z=405$　　（右）″

“与左行对减”〔（右）″－（左）′〕：

$4y+21z=87$　　（另列左位）

“再列减余以分左右位数”：

$2y+15z=57$　　（右）

$4y+21z=87$　　（左）

“以左行墨二为法遍乘左行”，“复以左行墨为法遍乘右行”：

$8y+60x=228$　　（右）

$8y+42z=174$　　（左）

“左右对减”：

$18z=54$

$z=3$

“以笔价乘后右余笔”，“以减右行余价”：

$2y=57-15\times3=12$

$y=6$

“于前右行原价内减原笔价、原墨价”：

$3x=81-9\times3-5\times6=24$

$x=8$

三色方程中还有下列二种类型，用现代数学语言可表示为：

$$\begin{cases}2x+3y=204\\5y+6z=64\\3x+7y=298\end{cases}\quad与\begin{cases}2x+5y-13z=5\\x-3y+z=0\\-5x+6y+8z=-3\end{cases}$$

这分别与《九章算术. 方程》第 2 题、第 3 题相似。

四色及四色以上方程

对四色方程，程氏认为“诸行乘减同前例”，并且“随问几多繁杂色，凭斯推广更无他”。即其解法同二色、三色一样，并可推广到任何色方程。但四色方程歌中所述以第四行为基准，奇数行与之互乘对减、偶数行与之互乘对加，系据下列例子而言，不具一般性，且全书仅有这一例四色方程：

“今有瓜二个，梨四个，共价四分；梨二个，桃七个，共价四

分；桃四个，榴七个，共价三分；瓜一个，榴八个，共价二分四厘。问：各该价若干？”

三种“杂法”

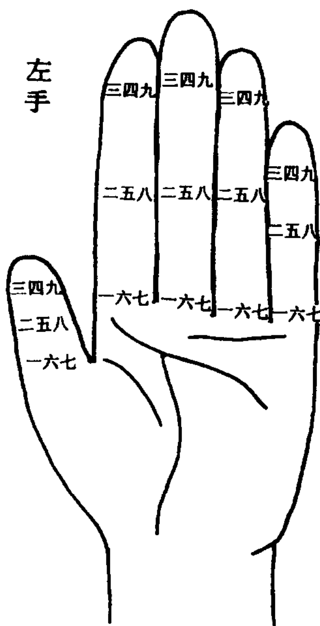


图 6.2.18 一掌金图

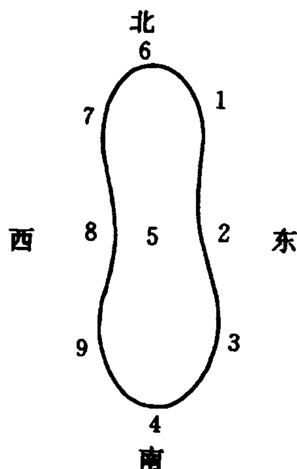


图 6.2.19

一掌金

卷十七“杂法”载有“一掌金”，即用手掌记数并与心算结合的一种算法。如图 6.2.18，左手每指 3 个指节分左、中、右 3 行，左行表示三、二、一，中行表示四、五、六，右行表示九、八、七。以五指定位数，程氏规定大指为百位，二指为十位，三指，四指，五指按个位名称而定，如两、钱、分等。用右指指尖指出左指所

主之数，便可进行运算。位数多时还可用两足底当二位配合进行。

足底记数

亦见于卷十七，即用足底位置记数。如上页图 6.2.19：

人朝南立，足底中央为五，指前一侧为四，跟后一侧为六，东南方向为三，西南方向为九，东北方向为一，西北方向为七。依次，向东一侧当为二，向西一侧当为八。即左行从下而上，分别为一、二、三，中行自上而下分别为四、五、六，右行从下而上，分别为七、八、九。

一笔锦

载卷十七，用筹码字进行的加法、乘法和除法运算。方法是先用筹码列出被加数、被乘数和被除数，然后按珠算方法和口诀，直接在这些列出的数字上进行运算。乘法同留头乘，除法用归除。

第三节 程大位的《算法纂要》①

程大位在完成了《算法统宗》后，考虑到统宗卷帙浩繁，内容庞杂，作为一本初学入门之书尚嫌不便。于是就“删其繁芜，揭其要领”，取其切要部分，另编为《算法纂要》四卷，于万历二十六年（1598 年）在安徽屯溪刻印。

一、《算法纂要》与《算法统宗》的关系

《算法纂要》的大部分内容摘自《算法统宗》。卷一与《算法统宗》卷一内容基本相同，但稍微简略。卷二算法部分歌诀、说明，悉依《算法统宗》，但题设不同。且阐述次序是《算法纂要》先讲除法，后讲乘法，与《算法统宗》相反。其中“就物抽分”、“贵贱差分”及“倾煎论色”以后各项，均采自《算法统宗》其他

---

① 李培业．《算法纂要》校释．合肥：安徽教育出版社，1986

各章。卷三系由《算法统宗》卷三方田章编成。卷四由《算法统宗》最后一卷杂法内摘出。“僧分馒头歌”取自《算法统宗》难题内。“周天问里”系新增加的一条。从所选条目内容看，除第四卷外，其余与《详明算法》接近，且《九归》设题，未用《算法统宗》，而全用《详明算法》。由此可以推知，程大位在编写《算法纂要》时，参考了《详明算法》。

下面就《算法纂要》所选条目，与《算法统宗》相应条目的内容作一比较[①]：

表 6.2.1　《算法纂要》与《算法统宗》之比较表

序号	条目名称	与《算法统宗》关系	在《算法统宗》何章
1	先贤格言	与《算法统宗》全同（以下简记“全同”）	总论 （卷一、二）
2	算法提纲	自《算法统宗》内摘录（以下简记“摘录”）	总论 （卷一、二）
3	算学节要	摘　　录	总论 （卷一、二）
4	数名释义	采自吴敬书，《算法统宗》无此项	
5	乘除用字释	有《算法统宗》内“用字凡例”“乘除用字释”两项摘录	总论 （卷一、二）
6	数、暗马式	全　　同	总论 （卷一、二）

① 李培业.《算法纂要》的研究. 载李迪主编. 数学史研究文集（二）. 呼和浩特：内蒙古大学出版社. 台北：九章出版社，1991. 85～90

序号	条目名称	与《算法统宗》关系	在《算法统宗》何章
7	大数	节录到“万”为止,《算法统宗》尚有亿以上22个名称。	总论（卷一、二）
8	小数	节录到“沙”为止，《算法统宗》有“尘”以下11个名称。	总论（卷一、二）
9	度	全　同	总论（卷一、二）
10	量	全　同	总论（卷一、二）
11	衡	全　同	总　论
12	亩	全　同	总　论
13	诸物轻重数	全　同	总　论
14	定算盘位次	全　同	总　论
15	九九便蒙	全　同	总　论
16	九因歌	全　同	总　论
17	九归歌	全　同	总　论
18	因乘论	全　同	总　论

序号	条目名称	与《算法统宗》关系	在《算法统宗》何章
19	九归归除论	摘录、缺少定位及约分论述	总　论
20	加法论	全　同	总　论
21	减法论	全　同	总　论
22	商除论	全　同	总　论
23	定法实诀	全　同	总　论
24	归除法实假如	增加一条，余全同	总　论
25	总诀	全　同	总　论
	以上为第一卷		
26	初学盘式	全　同	总　论
27	九归	歌诀同、例不同	总　论
28	九因	歌诀同、例不同	总　论
29	归除	歌诀同、例不同	总　论
30	乘法	歌诀同、例不同	总　论

序号	条目名称	与《算法统宗》关系	在《算法统宗》何章
31	加法	摘录，少2则例题	总　　论
32	减法	摘录，少2则例题	总　　论
33	商除	全　　同	总　　论
34	异乘同除	增　2　题	总　　论
35	约分	摘录，少2则例题	总　　论
36	通分	摘录，少4则例题	总　　论
37	差分	全　　同	总　　论
38	贵贱差分	摘录，少2题	衰分章（卷五）
39	就物抽分	摘录，少2题	粟米章（卷四）
40	倾煎论色	全　　同	总　论
41	衡法斤秤歌	摘录，少12题	粟　布　章
42	挑土计方	全　　同	商功章（卷七）
43	堆砖	系商功章内一题	商功章（卷七）

序号	条目名称	与《算法统宗》关系	在《算法统宗》何章
44	物不知总	歌诀同，例题不同	衰　分　章
45	束法	摘录，少 3 题	少广章（卷六）
46	盘量仓窖	摘录，少 6 题	粟　布　章
47	盐堆量法	全　　同	粟　布　章
48	堆垛	摘录，少 3 题	商　　功
	以上为第二卷		
49	丈量田地	摘录，删去总歌	方田章（卷三）
50	新制步车图式	全　　同	方田章（卷三）
51	方圆定则九图	全　　同	方田章（卷三）
52	各形用法	摘录，少 11 题	方田章（卷三）
53	各形截变	全　　同	方田章（卷三）
54	勾股等形演段	全　　同	方田章（卷三）
55	分田截积	只录“直田截积”	方田章（卷三）

序号	条目名称	与《算法统宗》关系	在《算法统宗》何章
56	休宁县科则	全　同	方田章
57	亩法论	全　同	方田章
58	古今折步法	全　同	方田章
	以上为第三卷		
59	一笔锦	全　同	杂法（第十七卷）
60	一掌金	增　加　1　题	杂法（第十七卷）
61	袖中定位	全　同	杂法（第十七卷）
62	孕推男女	全　同	杂法（第十七卷）
63	僧分馒头	摘自“难题”	难　题
64	周天问里	全　同	杂　法
	以上为第四卷		

通过上表可以看出，全书共 64 个条目，其中与《算法统宗》全同的有 34 条，摘自《算法统宗》的有 22 条，增加了例题的有 3 条，采自他书的有 5 条，百分之九十以上的内容是取自《算法统

宗》的。

对摘录的条目进行分析，可得以下三种情况：

（1）为了全书统一，删去有些诗词中与本书无涉部分。如“算法提纲”内删去“三要知加减定位”及“五要知诸分母子，…”，因这些项目在《算法纂要》中已不复存在，故删去。“算学节要”一项亦是如此。

（2）为实学者着想，删去繁难部分。如九归归除论中删去“定位”及“约分”部分；“加法”、“减法”、“约分”、“贵贱差分”、“就物抽分”、“衡法斤秤”、“盘仓量法”、“堆垛”、“各形用法”等条目都减少了例题，删去了一些较难的题。特别是“各形用法”中例题，原有26题，现只选15题，删去“覆月田”、“梭田”、“眉田”、“榄形田”及有关直田的各种杂题。对剩下的题，次序有所调整，由简单到复杂，循次渐进，对初学有益。“盘量仓窖”条目中删去的“船仓量法”及“芦席围囤”数题，都是比较复杂的。

（3）为实用目的，删去不切日用的部分。如“大数”、“小数”内删去其不常用单位，并注明：“亿之上，虽有名而无用也。”“凡小数尘之外，虽有名而无实，公私之不用也。”“束法”中仅选取求总数3题，删去求周数3题，因为实用中求总数的问题居多。

《算法纂要》除采自《算法统宗》者外，也增加了少量内容。一种是新增条目，如“数名释义”，《算法统宗》所无，由吴敬书中选入；一种是增加一些例题，如“异乘同除”条增加两题，乘法题内增加了“五个山头五只虎”的趣味题，“物不知总”中增加两题，“一掌金”中增加一题。这些都是为初学者着想，易于掌握所学内容。特别要指出的是“九归、九因”，“归除、留头乘”设题，全与《算法统宗》不同，次序亦相反。从设题上看，《算法统宗》的九归和九因，归除和乘法，各设一套题，而《算法纂要》只设一套题，数量减少一半，更体现乘、除互为还原之意。

若从全书选材看，《算法统宗》共有条目290条（包括108个难题），《算法纂要》只取录59条，只占全书的百分之二十多。其中总论部分（基本算法）原书57条，选取38条；方田章原书12条，选取10条，这两部分所选最多。其余粟米章选3条，衰分章选2条，商功章选3条，少广章选1条，都是极少数。盈朒、方程、勾股各章，未选一题。从这里可以看出《算法纂要》是偏重于基本算法介绍及为解决日常计算问题而编写的。

二、《算法纂要》明刊本

《算法纂要》成书后，在明末曾有书坊翻刻此书。入清后，大概是由于在序言中有"北虏充斥于边陲"语，为避讳免祸，无人再敢翻刻；公私书目，亦未记载，故其流传极少。今将目前所见明刊本与抄本介绍如下：①

安徽省图书馆藏本两种。这两本一为万历二十六年本，一为崇祯九年本。

（1）万历二十六年本。缺封面及扉页，前十五页下被虫蛀，已不易翻阅，有"宾渠小象赞"，有程大位的全身画像，"龙马负图"图（残）。全书为四卷，每卷题"新安宾渠程大位汝思父编集男仰渠子喜文焕校正"两行。

（2）崇祯九年本，与前本相比，主要内容全同，缺封面及扉页，少"龙马负图"图、"新增续编九归歌释义"、"历代帝王源流年数"、"历代年数总录"和程大位自识，但多程时用序一篇，因前有缺页，不知是否还有他人所作之序，程时用序前段也已残。

在程时用序后为"宾渠小象"，半身。

这个本子刊刻的比较粗糙，字型和程大位半身象都远不如万

① 李迪．国内收藏的明刊本与抄本《算法统宗》与《算法纂要》．载中国数学史论文集（二）．吴文俊主编．济南：山东教育出版社，1986．48～55

历二十六本精致。由此断定确是重新刻版印刷的。根据《算法统宗》叠经印刷的情况来看，《算法纂要》的印刷次数也会很多，到崇祯九年可能由于旧版的破损不能再用了，而重新刻版的。

安徽省博物馆藏本。此本前已残，有程大位半身象，没有见到程时用序，有“万历戊戌”年牌记。因看得不够仔细，又未能把别的本子与之对照，不能对版本做出肯定性的结论，系万历二十六年的原刊本可能性较大。

北京图书馆藏本 3 种。三部《算法纂要》为两种版本，原版一本，不知年代的两本。

（1）万历二十六年本。这个本子保存比较完好，封里有“程氏宾渠算法纂要”和“板藏休邑率口维新堂”两行，接着的几页是：程时用万历戊戌刻直指算法纂要序、吴继绶序、龚显画程大位全身像、吴宗儒“宾渠程君小象赞”、“龙马负图”图、目录、程大位半身象，以下为正文。书后有牌记“万历戊戌五月宾渠旅舍梓行”、最末是“万历戊戌夏五月鉴上居士范时春熙寰父书”。在最后一页的上下均刻“共九十九”（双面）。原装一册，封面上有毛笔字写着“一掌金”和“吟月山房”，显然是吟月山房主人写的，绝非原书所有。根据这些情况可知，此本与安徽省图书馆藏的第一种本子完全相同，均属万历二十六年的原刊本。

（2）永馨检修本，此本“原一册，1981 年 1 月改装二册”，系在书内夹的纸条上用红笔写的一行字，当为北京图书馆改装时加进的，无封里与封面，吴继绶序只剩一面，下为目录，还有程大位半身象，三十六峰主人吴宗儒小象赞和“龙马负图”图，署名与以前各本同。无“新增续编九归歌释义”，其余内容与万历二十六年本无大差别。卷四末“历代帝王源流年数”不全，已下全缺。全书无年代标记，北京图书馆断为万历二十六年本，没有根据。实际上既不是万历二十六年本，也不是崇祯九年本，因为除了所刻字形有差别外，还有两处明显的证据，就是：其一，“小象赞”之

末均有两印（刻在板上的），但刻法相反，万历二十六年本和崇祯九年本均系上阳刻（黑字白地）下阴刻（白字黑地），而这个没有年代的本子则上阴刻下阳刻；其二，“小象赞”在前两本有“九九隐迹”四字，而在后一本的是“九九迹隐”。如果是抄本可以说是改写或抄错，可是刊本就只能是重刊的，不能有别的解释。因此这是不同于前两版本的第三种本。遍查全书找不到清代刊刻的迹象，可能是明刻本，大约是明末书商所刻，与程氏家刻有别。

在这部书的底皮里有数行毛笔字：“此书丰盈坦汪宜亲台于光绪念六年六月间担来卖永馨名下，计钱二百文。至于光绪叁拾年岁在甲辰正月永馨检点葺修其书，切莫糟塌。”给出此书在清末一点流传的情况和当时的售价，但永馨为何人，没有任何线索。

为了称呼上的方便，我们把此本叫做“永馨检修本”。

(3) 永馨同型本。北京图书馆还有第三部《算法纂要》，也被断为万历二十六年本。刻本，经图书馆修理过，装成一册。缺封面与封里，有吴继绶序，有半身像，最后的“历代帝王源流年数”和“历代年数总录”完整无缺。经对照知与永馨检修本相同，为一种版本，故称为“永馨同型本”。

自然科学史研究所藏本、严敦杰藏本和向达(1900～1966)藏本应均为万历二十六年本。

三、《算法纂要》在历史上的地位和作用[①]

我们先分析一下《算法纂要》的继承性问题。程大位在编《算法纂要》时，并非只做《算法统宗》的摘编工作，而是以《详明算法》为蓝本进行选材，继承了《详明算法》这一类型算书的优良风格。这可以从以下几方面得到证明：(1) 条目多数与《详

---

① 李培业．关于《算法纂要》的研究．(李迪主编)．载数学史研究文集(二)．呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1991．85～90

明算法》相同。《详明算法》共27个条目，《算法纂要》就有22个和它相同。仅“乘除见总”、“求一”、“端疋”等少数条目，为《算法纂要》所无。（2）诗词多与《详明算法》相同。《详明算法》有诗词19首，其中14首与《算法纂要》相同。（3）有些例题与《详明算法》相同。我们查出“九归”设题未采用《算法统宗》题，而与《详明算法》相同。另外，“加法”、“商除”、“异乘同除”、“约分”、“斤秤”、“堆垛”中各题，有的与《详明算法》相同。

现在我们进一步研究《算法纂要》这种类型的算法书在历史上所起的作用。

从杨辉以后，实用算书大致分成两大类型。一种是以“九章”问题分类，沿用《九章算术》格式，综合各种数学知识，由基本算法到高深部分，样样俱备，能体现出当时数学水平。这种类型的书有杨辉的《九章详注算法》，吴敬的《九章算法比类大全》、程大位的《算法统宗》等。另一种是以日常应用的问题分类，内容较少，适宜初学。这种类型的有杨辉《日用算法》、贾亨《算法全能集》、何平子《详明算法》等。我们把前者简称“九章型”，后者简称“日用型”，《算法纂要》即属于“日用型”。

“日用型”算书除基本算法外，大多包括以下项目：

异乘同除、就物抽分、差分、贵贱差分、斤秤问题、堆垛、盘量仓库、丈量田亩、土方计算。

这种“日用型”算书，在程大位以后，出现甚多。如：

（1）黄龙吟.《算法指南》二卷（1604年）；

（2）蒋守诚.《算法全书》四卷（1675年）；

（3）王　相订正.《指明算法》二卷（约1684年）；

（4）《算法指掌》五卷；

（5）沈士桂.《简捷易明算法》四卷（1707年）；

（6）刘虬江.《算法大全》二卷（1714年）；

(7) 陈鹤龄.《算法正宗》四卷(1756年);

(8) 程大年.《增补算法正宗大全》八卷(1800年);

(9)《增补详明算法大全》一卷(未记年月);

(10) 吴兆珍.《算法指掌大全》四卷(1818年);

(11) 状元阁印《算法大全》一卷(1895年);

(12)《新算法大成》四册(1909年)。

这种类型的算书,除刻本外,民间流传抄本甚多。如上述状元阁印《算法大全》序言中说:"甲午仲秋,於友人案次偶见藏书中抄本算法大全一册,阅其语句清爽,与他本不同,……缮写覆校而付梨枣。"李迪藏有抄本算书:(1)《算法纂要》(1801年抄,与程氏《算法纂要》不同)。(2)《田子泉算法》两册(未记抄写年月),亦属"日用型"算书。

"日用型"算书在民间普及珠算及初等数学知识方面,起到了重要的作用。由于它的内容少、日用性强,以讲述珠算为主,因而易于为广大群众所乐于接受,便于在民间广为流传。所以,这种类型的算书,实际上成为明、清时代广大群众的数学启蒙读物。《算法纂要》虽因某种原因流传不广(上述蒋守诚《算法全书》内引用了《算法纂要》),但它的编辑目的及内容仍然继承了下来,因多种同类著作的出版,发展了这一编排体系。从这种意义上说,仍然起到了应有的作用。

从教学上来说,《算法纂要》与《算法统宗》的关系,尤如《孙子算经》与《九章算术》的关系,其作用一个是启蒙,另一个是深造。这就为珠算的入门和系统学习创造了物质条件,在珠算教学上具有重要的意义。

第四节　《算法统宗》的流传

一、《算法统宗》在国内的流传

《算法统宗》一书流传得广泛和长久，在中国数学史上是罕见的。《算法统宗》刊行之后，自明未至有清一代的珠算书，不是《算法统宗》的翻刻本，就是它的改编本，民间还有各种抄本流传。其流通量之大，影响之深是无与伦比的。李兆华将《算法统宗》与《同文算指通编》（1613 年）算题相同者列表进行了比较（见表6.2.2）①，

表 6.2.2　《算法统宗》与《同文算指通编》比较

《算法统宗》			《同文算指通编》（1613 年）		
卷	节	题号	卷	节	题号
5	贵贱差分歌	1. 2. 3.	3	和较三率法 第五	10. 11. 12
8	筑墙截下广问今高	1. 2. 3.	1	三率准则法 第一	16. 17. 18.
10	盈不足 两盈两不足 盈适足不足适足	1. 5. 6. 1. 2. 4. 1. 2. 3.	4	迭借互证法 第七	30. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39.

① 李兆华.《算法统宗》试探. 自然科学史研究，1990，9（4）：308～317

《算法统宗》			《同文算指通编》（1613 年）		
卷	节	题号	卷	节	题号
	双套盈朒	1.			40.
		2.			41.
		3.			42.
		1.			43.
	取钱买物盈朒歌				
		1.			44.
	取钱买物两盈歌				
		2.			45.
	取钱买物适足歌	1.			46.
		2.			47.
12	勾股容方容圆共歌	1. （勾股容方）	6	附勾股略	
	较求勾股弦共歌	1.（勾、股弦较，求勾股弦）			4.
		10. （股、勾弦较，求勾股弦）			10.
		11. （弦、勾股较，求勾股弦）			9.
					8.
	股别勾弦歌	2. （股、勾弦和，求勾股弦）			12.
		3. （勾、股弦和，求勾股弦）			13.
	勾股较股弦较歌	4. （弦、勾股和，求勾股弦）			11.
		2. （勾弦较、股弦较，求勾股弦）			14.
		3. （勾弦和、股弦和，求勾股弦）			15.

由此表可知，《算法统宗》是《同文算指通编》的主要依据。再如清代数学家梅瑴成称"算学书籍散佚略尽，今所有者唯程大位汝思所集《统宗》一书，学者犹可得知《九章》名目。"[①] 于是又对《算法统宗》进行改编，称为《增删算法统宗》。梅瑴成在清廷任职，又打着皇上的旗号，将该书多次翻刻。梅瑴成对《算法统宗》极为推崇，1713 年以梅氏为主，编写《数理精蕴》时，梅氏就引用了《算法统宗》的许多算题。时至今日，《算法统宗》的许多歌诀和算题仍在我国民间广为流传。

《算法统宗》一书，经多次翻刻、改编，其版本至今尚无确切的统计。《算法纂要》范时春《跋》称"万历壬辰，业已编辑《算法统宗》，用布海内。一时纸价腾贵，坊间市利，竞相翻刻。"康熙五十五年程光绅重刻《算法统宗序》称，"当时风行海内，坊间刻木无虑数十。"这些记载都是对这一情况的说明。为探讨方便计，以下将刻书版本分为 6 类[②]，并从经眼诸本中选择刊刻年代或书坊名号明确者各举数例，而后就有关问题略作几点说明。[③]

第一类　十七卷五集本：

《新编直指算法统宗》明三桂堂刊本

《算法统宗》明荣观堂刊本

《新编直指算法统宗》日本延宝三年（1675 年）汤浅市郎刊旁训本

第二类　十七卷四集本：

《新编直指算法统宗》　明汪景升考阅本

《新编直指算法统宗》　康熙五十五年（1716）程光绅刊本

第三类　十二卷本：

---

① 梅瑴成. 增删算法统宗序.

② 此处未计抄本.《算法统宗》抄本不少，可自成一类.

③ 李兆华.《算法统宗》试探. 自然科学史研究，1990，9（4）：308～317

《算法统宗》　　明刊本（严敦杰藏书）

《新刻算法统宗大全》　明文茂堂刊本

《增补算法统宗》　　同治己巳（1869）维经堂刊本

《增补算法统宗大全》　光绪壬午（1882）文盛堂刊本

《增补算法统宗大全》　光绪丁酉（1897）成文堂刊本

第四类　十三卷本：

《算法统宗》　古今图书集成铜活字本

《算法统宗》　一九三四年中华书局影印本

第五类　十一卷本：

《增删算法统宗》　（附贾步纬校算记）光绪四年江南制造局刊本

《增删算法统宗》　光绪二十二年（1896）巩衡堂石印本

《增删算法统宗》　光绪二十二年（1896）测海山房石印本

《增删算法统宗》　民国元年（1912）章福记书局石印本

《增删算法统宗》　民国三年（1914）广益书局石印本

第六类　　不入以上五类者：

《详注全图算法大成》（八卷）　光绪二十一年（1895）两宜斋石印本（王庸选校正）

《增补算法统宗大全》（四卷）　光绪三十二年（1906）树德堂刊本（黄锡纯编集）

对以上 6 类版本作如下几点说明：

(1) 以上所列 6 类版本，其中前 4 类之正文内容相同，卷次厘定不同。

(2)《算法统宗》十七卷万历壬辰由宾渠旅舍初刊。先为 5 集，后为 4 集，两种。《算法纂要》程大位识语“万历壬辰，余编《统宗算法》（金木水火土 5 本，后改为元、亨、利、贞 4 本）。……明年癸巳，书坊射利，将版翻刻。”现传明刊诸本中，翻刻本亦将原刻牌记照刻，因而鉴别和发现原刻仍有一定困难。

(3) 三桂堂本、容观堂本、汤浅旁训本均仅有吴继绶序，纪年为万历癸巳，皆非足本。三桂堂本、容观堂本牌记“万历壬辰五月宾渠旅舍梓行”系翻刻时照刻，不足为凭。此二本相校，正文版片同，封面（即今之扉页）版片不同，当由版片易主所致。三桂堂本为汤浅旁训本之底本。

(4) 康熙本系据“家藏原本”校刊，较之现传诸本既精且足。全书分为元、亨、利、贞 4 集，集各成册，与《算法纂要》程大位识语相符。全书序跋文字共 6 篇，其中明人 3 篇序文即万历壬辰（1592）程涓序，万历玄黓执徐（壬辰）程时用序，万历壬辰吴继绶序尤为鉴别初刻与足本之有力资料。北图藏汪景升考阅本仅有程时用序，吴继绶序，纪年皆为万历壬辰，但缺程涓序，亦非足本。

(5) 十二卷本流传较多，精粗悬殊不一。初刻或始自明万历年间。已故严敦杰先生藏有十二卷本，六册，经鉴定为明刊。该书首尾缺，具体刊刻年与书坊不详。李兆华藏十二卷本，原装六册，封面题“新刻算法统宗大全”，“四美堂梓行”。四周单边，半叶 11 行，行 24 字，白口，单鱼尾。版心下方皆有“文茂”二字。此本 1980 年购于杭州古旧书店。1986 年 11 月持此本请教严敦杰先生。严先生认为，“四美堂梓行”五字系挖补，可能是明版，清初挖补重印的。秉此精神，遂疑此书为文茂堂原版。文茂堂是明万历间福建建阳书林[①]的一个书坊。万历三十一年刻《摭古遗文》二卷，万历四十年刻《五车韵瑞》一百六十卷[②]。因此，十二卷本可能刻于万历年间。所见十二卷本皆仅有吴继绶序，且纪年为癸巳，此与三桂堂本同。

---

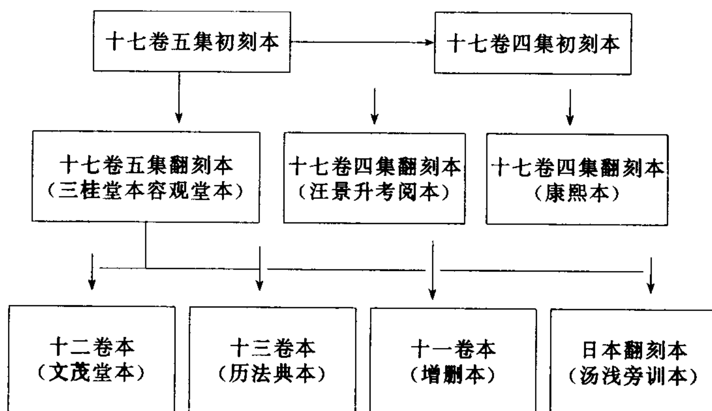
① 书林，过去认为是书店，误. 实为地名. 在刻书名区建阳之西南，距麻沙镇约 20 里. 见魏隐儒《中国古籍印刷史》第 73 页. 印刷工业出版社，1988

② 杜信孚. 明代板刻综录，第一卷.

(6) 十三卷本亦称历法典本，在《古今图书集成》卷一百一十三至卷一百二十五。《古今图书集成》初由陈梦雷编纂，康熙四十五年（1706 年）缮成清本，至雍正六年（1728 年）印成。文字用铜活字，插图用木刻版。正文中文字有改动，只有吴继绶序，此点与三桂堂本同，但吴序不载纪年。

(7) 十一卷本即梅珏成增删本，于乾隆二十五年（1760 年）完成，以光绪四年制造局刊贾步纬校算本为上。梅氏增删之处已于卷首一一说明。此本改动甚多，特别是卷五、卷六、卷八有关开方与方程的内容，多以《数理精蕴》、《方程论》有关内容为蓝本改写，难以窥见《算法统宗》原貌。此本只有吴继绶序，纪年亦为癸巳，此与三桂堂本同。经比较可以肯定，此本之底本不是康熙本，也不是十三卷本，比较接近三桂堂本，可能据此增删。

概括起来，《算法统宗》主要版本间的关系大致如下：



二、《算法统宗》在国外的流传

《算法统宗》还流传到朝鲜、日本及东南亚各国，尤其在日本，

影响颇大。[①]

日本丰臣秀吉于1592年用兵朝鲜时，朝鲜适值李朝时代。6年后丰臣病死，战争结束。《算法统宗》（以下简称《统宗》）是朝鲜李朝时代算士正规教科书[②]，此书就在这场战争中从朝鲜东传，由丰臣的部下毛利重能带回日本，此后著《归除滥觞》二卷，教授国人。1627年，日本数学家吉田光由著《尘劫记》，跋文称该书依据汝思（程大位）之书。随后，在日本便出现上一珠下四珠的珠算盘，一直沿用至今。

我国古代数学经典（如《算经十书》）中主要著作，远起南北朝时就经朝鲜传入日本。但那时只限上层社会学习，民间很少流传。而《统宗》则不然，由于书中多工农商各行各业算例，平易近人，因此其中算法迅速为日本人士接受。

日本人士自著数学专著以吉田光由《尘劫记》为嚆矢，江户时代汉学家角仓素庵以《统宗》教侄儿吉田光由，吉田就以《统宗》为蓝本著《尘劫记》，角仓从事商业、土木建筑业，在此影响下，数学专业书《尘劫记》偏重经济生活。此书自1672年初版后，一再增删再版，发行量极大。“尘劫记”一词成为畅销书的代名词。1977年大矢真一校注本（岩波文库）整理各种版本重订新编。计卷一共19节。卷二共16节，卷三共21节。《尘劫记》初版后约半个世纪，汤浅得之应民间日益增长的需求，于1675年在日本翻刻《统宗》，并加注释，分12册出版。从此对和算发展影响更大。

人称“和算之圣”的关孝和（1642？～1708），少年时代自学《统宗》[③]。关氏学术自成派系，师弟相承，畴人辈出，至今保存他授徒习算目录，其中大多是《算法统宗》纲目，我们摘录如下，以

① 沈康身.《算法统宗》在和算发展中的奠基作用.

② 金容云、金容局. 韩国数学史. 东京：1978

③ 日本学士院. 明治前日本数学史. 东京：1978

见此书所起奠基作用之大：

“河图　洛书　太极　两仪　四象　八卦　释九数之法　九数除法　明纵横决　大数之类　小数之类　求诸率类　斛斗起率　斤秤起率　端匹起率　田亩起率　之分齐同门　合课分数　减课分数　平分之术　经分之术　乘分之术　重有分术　重分之术　通分之术　方田　粟布少广　商功　均输　衰分　盈朒方程　句股……吴子廉率……

右所传之算术予累岁究力磨思所得者也。正实非真积功久未晶辄语矣。今予颇得天元之一术，解难法则我岂隐之乎。于是倾倒秘府以传焉。……子其敬。

宝永元甲申岁十一月良辰

官地新五郎殿

关新助藤原孝和印”

《算法统宗》重要观点散见和算各种专著，这里辑录其中10个方面，对照有关和算论述，作说明、比较。

记数

《算法统宗》卷一“大数”目中，一、十、百、千、万十进；万以上万进为亿、兆、京、垓至无量数，共15个单位。新编《尘劫记》卷一第1节“大数名”中各单位名称及进位规则全相一致，仅改称无量数为无量大数。

《算法统宗》卷一“小数”目中，分以下为厘、毫、丝、忽至沙、尘均十进制。共9个单位。《尘劫记》卷一第2节“小数名”同此，只是在尘以后增设埃位。

《算法统宗》卷一载暗马式，象形算筹记数：

一	二	三	四	五	六	七	八	九	空位
丨	‖	‖丨	×	[illegible]	⊥	╧	≟	⊥×	○

和算著作都仿此。但四、五、九记号仍用横划、竖划，严格按筹算记数规则。

珠算

中国珠算盘与《算法统宗》同时传入日本，丰臣侵朝时，前田利家在朝鲜名护屋所用算盘[①]保存至今，是珠算盘传入日本早期实物资料。珠算不久就风行日本，至今仍是不能代替的大众化计算用具。

在珠算口诀方面，《算法统宗》卷一有“九九合数”，从一一如一起，至九九八十一共 45 句。《尘劫记》卷一第 6 节删去乘一共 9 句，选用其余 36 句。《算法统宗》同卷还有“九归歌”。整套除法口诀在《尘劫记》中同节有大篇幅记载，并附全图。中国珠算口诀琅琅成诵，原因之一是汉语为单音节，一字一音节，所以得心应手，计算敏捷，为别的语种所不及。日本人士在珠算运算时为迎合中国习惯，对口诀有过某些改革，例如：“二一添作五”改呼“二一天作五”；“六一下加四”改呼“六一加下四”。以便习诵。

粟布、衰分

《算法统宗》卷四粟布章论正、反比例，日本算书颇有模拟。例如“官粮带耗歌”：官粮带耗在其中，一石例如七升同，要见正米减去七，隔位除去法更隆。《尘劫记》卷二第 3 节有题“运米 107 石在码头，传运费 7 石，今运到米 250 石，问：应付运费多少？答：16 石 3 斗 5 升 5 合 1 勺 4 抄。”显系同型。

《算法统宗》卷五衰分章论配分比例。《尘劫记》卷一第 11 节有题“上米一石值银 27 钱 3 分，中米一石 25 钱 5 分，下米一石 23 钱 7 分。按一、二、四数量买米，今共付银 216 钱 8 分。问：三种米各买多少？答：上米买 1.252 45 石，中米 2.504 9 石，下米 5.009 8 石”。此题与《算法统宗》所设“合率差分”九题同一类型，而难度加深。

---

① 金容云、金容局．韩国数学史．东京：1978

同卷《算法统宗》“递减挨次差分”有题“今有金 8 两 1 钱，欲挨次连套钟五个，各重若干？答：大号 2 两 7 钱，二号 2 两 1 钱 6 分，三号 1 两 6 钱 2 分，四号 1 两零 8 分，五号 5 钱 4 分。”《尘劫记》卷二第 1 节有入子算①相对应，有题说“八个容器分别容 1、2、3、4、5、6、7、8 升锅子，共值银 43 钱 2 分。如按容量大小递增锅价，问各值银多少？答：1 两 2 分、2 两 4 分、3 两 6 分、4 两 8 分、6 两、7 两 2 分、8 两 4 分、9 两 6 分。”

方田、勾股

《算法统宗》卷三方田章论各种形状田亩面积。和算专著有大量论述。《尘劫记》卷二第 4 节检地之事所录方、直、梭、梯、圭、圆 6 种田名称都从《算法统宗》。此外复月、弧矢、勾股、三广、钱、榄、牛角以及四不等田也都自《算法统宗》出。《算法统宗》卷八勾股章所论在和算中尤多反映。柴村盛之《格致算术》(1657) 有已知直径、矢求所对应的弦长；砇村吉德《算法缺疑抄》(1661 年) 勾股容圆；万尾时春《规矩等分集》(1722 年) 所设池中葭、去木折，问阈开、井深、方邑等题都采自《算法统宗》相应各题。此外在勾股定理推导方法上也很受《算法统宗》出入相补，以实补虚影响。今村知商《竖亥录》(1639 年) 双弦股一题，指出斜三角形高与腰及其在底边上投影的关系公式，借此得到秦九韶《数书九章》三斜公式，村濑义益在《算法勿惮改》(1673 年) 对此作出证明。

少广

《算法统宗》卷六论少广，开平方法，开立方法，在和算中一再引用。关孝和的学生建部贤弘 (1661～1716) 著《大成算经》，所述开平方不尽近似公式

---

① 入子为日语．义：重量或容量依次渐增如锅体之类的成套器皿．

$$\sqrt{a^2+b}=a+\frac{b}{2a+1}$$

事实上就是《算法统宗》所说“余实不尽，却将所商倍之，再添一，共得数命。”同书带从开方、减从开方都采自《算法统宗》，但解法从《杨辉算法》。

开方作法本源

《算法统宗》卷六称自吴（敬）氏九章作“开方廉率作法木源图”。即对于二项展开式 $(a+b)^n$，各项系数为：

C_n^0，C_n^1，C_n^2，…，C_n^{n-1}，C_n^n.

取 $n=6$，村井东渐《算法童子问》（1784 年）有图。取 $n=7$。

关孝和《括要算法》（1712 年）卷一“垛积总术”对自然数前 n 项幂和公式，认为与开方作法本源图有关，对于

$$\sum_{r=1}^{n} r^p = a_0 n^{p+1} + a_1 n^p + \cdots + a_{p-1} n^2 + a_p n$$

他按照《算法统宗》命名：

$p=1$ 为圭垛。$p=2$ 为方垛。$p=3$ 为立方垛。$p=4$ 为乘方垛。他推导 a_i 与本源图系数的关系是

$$a_i C_{p+1}^1 = (p+1)\ a_i$$

$$a_i=\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ 0,\ -\frac{1}{30},\ 0,\ \frac{1}{42},\ \cdots\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

与瑞士伯努利（Jacob Bernoulli 1654～1705）所著《猜度术》（Ars Conjectandi，1713 年）结果相同，而早于伯努利。

商功

《算法统宗》卷七论商功，方台体积公式为“上方自乘，下方自乘，又以上方乘下方，并三数以高乘之，以六归之。”日本古代误用上、下底面积乘高作为体积。《润背》（室町时代 1336～1573）计算一升容积用此公式。《尘劫记》也误用。《坚亥录》始纠正，采用《算法统宗》公式。羡除公式为“并三广以深乘之，用六归之”，砜村吉德《算法缺疑抄》称为榨形，并有推导。河堤公

式为“以东高倍之，加西高，却以东头上下广并之，乘之，折半；以西高倍之，加东高，却以西头上下广并之，乘之，折半；相并，再以长乘之，为实。以五归之，得积。合问。”《算法缺疑抄》采用这一公式，改“以五归之”为“以六归之”，并且把河堤看成上下二羡除以为推导。

均输、盈朒

《算法统宗》卷十均输有歌“今有程途二千七，十八人骑马七匹。言定十里轮转骑，各人骑行怎得知。”答：“人行一千六百五十里。骑马一千零五十里。”《尘劫记》卷三第16节有题“行程六里，有四人，三马。问各骑行、步行多少里？”仿照《算法统宗》方法解：一马行6里，三马行18里，每人可骑行4.5里。

《算法统宗》卷十一盈朒有歌：“隔墙听得客分银，不知人数不知银。七两分之多四两。九两发之少半斤。答：六人，银四十六两。”《尘劫记》卷三第10节有“盗人算”：“桥下盗人分绢，每人分八匹，少七匹，每人分七匹，多八匹。问有盗多少，有绢多少？”答：“有盗十五人，绢一百一十三匹。”

《算法统宗》卷五物不知总题有《孙子歌》：“三人同行七十稀，五树梅花廿一枝。七子团圆正半月，除百零五便得知。”《尘劫记》卷三第13节有“百五算题”，与《算法统宗》所录《孙子算经》卷下第26题略有变化，“今有物不知数，只云七数剩二，五数剩一，三数剩二，问共几何？”并按《算法统宗》所载术文解出答数是86。关孝和《括要算法》卷四《诸约之术》对《算法统宗》所引方法又有发展，结果与秦九韶《数书九章》“大衍总数术”堪相伯仲，前后呼应，可称东方数学双宝。他对一次同余式提出一般解法——剩一术。对模不两两互素同余式组提出一般解

法，用互约术使化为等价的两两互素模同余式组。[①]

幻方、幻圆

《算法统宗》卷十二有幻方，四阶称花十六图，五阶至十阶各有专名，与杨辉《续古摘奇算法》并不完全相同。关孝和《方阵新法》(1683 年) 自三阶至十阶各有图，独立创新。基本上与中国结果不相同，我们以五阶幻方为例，如表 6.2.3

杨辉

12	27	33	23	10
28	18	13	26	20
11	25	21	17	31
22	16	29	24	14
32	19	9	15	30

程大位

5	23	16	4	25
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
1	3	10	22	21

关孝和

8	7	23	25	2
22	12	17	10	4
5	1	13	15	21
6	16	9	14	20
24	19	3	1	18

表 6.2.3

再如，《算法统宗》有聚六图，矶村吉德《算法缺疑抄》照原样实录。

《算法统宗》有攒九图，《尘劫记》卷一之末以填空方式作为算题征解提出。

关孝和《方阵新法》法。推广《算法统宗》将攒九图成为具有 2、3、4、5 条对角线的幻圆。

星野实宣《股勾弦钞》(1672 年) 有二十阶幻方，为和算所作阶数最大的幻方。

① 沈康身. 秦九韶大衍总数术与关孝和诸约分术.《秦九韶与数书九章》. 北京：北京师范大学出版社，1987

第三章　明代中后期的其它数学著作

本章主要讨论除王文素《新集通证古今算学宝鉴》和程大位《算法统宗》、《算法纂要》著作外的其他数学著作，并以有传本的珠算书为主。

第一节　明代中期几位数学家的工作

明代中期（相当于16世纪前中期），同时代的顾应祥、唐顺之和周述学对数学进行过研究，有的有著作传世。

顾应祥（1483～1565），号箬溪道人，吴兴（今浙江湖州）人，明嘉靖（1522年）时任滇南巡抚，后任刑部尚书和都察院右副都御史等职。在刑部尚书任上，受诏定议刑律条例，自著有《重修问刑条例》七卷。顾应祥兴趣广泛，还著《惜阴录》十二卷和《授时历法》二卷等书。但是，他经常感兴趣和研究的是数学，甚至在外做官也不间断地进行研究。他在一段自述中说："应祥自幼性好数学，然无师传，每得诸家算书，辄中思索，至于不寐，久之若有神告之者，遂尽得其术。"① 他著有《勾股算术》二卷（1533年）、《测圆海镜分类释术》十卷（1550）、《弧矢算术》一卷（1552年）和《测圆算术》四卷（1553年），均有抄本传世②。这些著作都是对传统数学问题的整理和研究，而元代的《测圆海镜》是他

① ［明］顾应祥．勾股算术序．1533

② 《明史》卷96"艺文志一"载有顾应祥《测圆算术》四卷、《弧矢算术》二卷、《释测圆海镜》十卷，不包括《勾股算术》。

研究的出发点，手中还有《四元玉鉴》、《周髀算经》以及沈括的《梦溪笔谈》等著作。他的4部著作可以分为两类，一类是对勾股和弧矢的研究；一类是对《测圆海镜》的整理。下面分别予以简述。

《勾股算术》二卷，前有嘉靖癸巳（1533年）在滇南巡抚任上写的自序，其中表达了他为什么要写这本书，是在《周髀算经》和《四元玉鉴》的基础上对“所谓勾股弦和较、黄中之说开阖折变，悉得古人立法之旨，求之于心，无不吻合，盖有不假于思索者，恐其久而忘也。政务之暇，手录其详节，各为问答一二章附之，名曰《勾股算术》，俾后之学算者因此求之，庶有以得其要领云。”在正卷之前有“勾股论说”一篇，其中给出了40个有关勾股形三边与三边和与差之间的各种关系及互求公式，有了这些公式可以较方便地计算各种勾股问题。该书是有关勾股形的第一部数学专著，而“勾股论说”则是其总纲。其中除勾股本身的问题外，还有些应用问题。总共分为38类，每类包括若干问题，共77问，其中包括“方五斜七”的“方斜术”5问。全书最后两类，即“勾与股率勾弦和率求股弦三十七”和“容方与勾股率求勾股弦三十八”较为重要，“率”是指速度，例如有一题：“甲善走，乙次之。甲行七，乙行三。今乙东行，甲南行十步斜之，会乙。问：各行几何？”其中“甲行七，乙行三”是指在同样时间内甲行七单位距离，乙行三单位距离，速度不同。把速度与勾股形结合起来的做法，以前尚不多见。

《弧矢算术》一卷，有顾应祥自序1篇，正卷前有“弧矢论说”和“方圆论说”2篇短文，分别讨论弧矢和方圆的一般性问题。前者用到了解四次方程方法；后者主要是研究“方五斜七”和圆周率，没有给出更好的结果，仅是22/7和157/50，其中又有一些“阴阳象数”的内容。全书的内容主要是讨论弧、矢、弦、截弦和截积等之关系，都是通过勾股定理，有些要归结为解方程求出结

果，其中有10个四次方程的解法是传统的增乘开方法。就该书的性质而言是弧矢计算，可以说是这方面的一本专著。

《测圆海镜分类释术》十卷，前有"古濠沐"于嘉靖庚戌（1550年）序。正文之前有"测圆海镜总率名号"和"勾股步率"，分别为《测圆海镜》之"总率名号"和"今问正数"。顾应祥对李冶《测圆海镜》的全部问题，重新分类和进行注释，都用传统的高次方程解法和算术方法求出结果，就具体解法来说比《测圆海镜》详细得多，是一部有价值的资料，但是把原来书中的天元术内容全部删去，他认为"但其每条下细草，虽径之天元一，反复合之，而无下手之术，使后学之士茫然无门之可入。辄不自揆，每章去其细草，立一算术，又以其所立通勾边股之属，各以类分之"①。

《测圆算术》四卷，前有顾应祥嘉靖癸丑（1553年）自序和同年庞嵩后序。全书是在《测圆海镜》的基础上重新编录的勾股容圆专著，同样删去了天元术，也是用传统的高次方程解法和算术求解。

由以上所述可知，顾应祥的数学水平不高，与宋元数学家相比，有较大距离。他不懂天元术，成为后世笑柄，但在明一代，如前述之吴敬、王文素、程大位等在著作中均未用到，只是未说"而无下手之术"的话而已。

唐顺之（1507～1560），字应德，号荆川先生，武进（今江苏常州）人。祖父、父亲都在明朝为官。他本人年二十三，"举嘉靖八年会试第一，改庶吉士"，后来有时为官，有时家居。晚年协助胡宗宪（？～1565）在东南沿海讨剿倭寇。"顺之于学无所不窥。自天文、乐律、地理、兵法、弧矢、勾股、壬奇、禽乙，莫不究极原委。"② 知识面很广，著作有《乐论》八卷、《五经总论》一卷、

① 顾应祥自序. 转引自《中国古代科学技术典籍通汇·数学卷》第二分册. 993

② 《明史》卷205"唐顺之".

《史纂左编》一百四十二卷、《右编》四十卷、《儒论》六十卷、《荆川集》二十六卷等，数学方面有《勾股等六论》一卷[①]。《勾股等六论》又称《勾股六论》，收入《荆川全集》，流传至今。书中包括“勾股测望论”、“勾股容方圆论”、“弧矢论”、“分法论”、“六分论”等，内容都比较浅显。

唐顺之是一位打算盘的能手，有一段记载如下：

“唐顺之至庐州，适府有算粮事，唐子乃索善算者十余人，人各与一数，算讫记其概只数字，凡三四易，自拨盘珠，每一数只记数字，不移时一府钱粮数目清矣。老书、算，咸精其神速。”[②]
这里只说唐顺之“自拨盘珠”，而未说他人用何方法计算，根据当时的情况来看，肯定也是珠算，不会是其他算法。那时在农业、商业等方面全用珠算。

周述学（不知生卒年），字继志，后来别号云渊子，山阴（今浙江绍兴）人。他学问渊博，对天文、历法、数学、地理、兵法以及航海术等都有研究。与顾应祥、唐顺之等讨论历法问题，也曾帮助胡宗宪抗御倭寇，“述学不殚出入狂涛，卒成海上之功。”[③]一生没有做官，“逍遥湖海”，最后“以布衣终”[④]。

周述学改进了沙漏，研究过“浑仪更漏”，天文问题也有新的看法。著有《神道大编历宗算会》十五卷，抄本 8 册，题“山阴云渊周述学继志辑撰”，成于嘉靖三十七年（1558 年）。又有《神道大编历宗通议》十八卷，抄本二种。北京图书馆北海分馆藏有一种《云渊先生文集》三卷，抄本 3 册，是从前二本抄出的有关数学、天文学等短篇论文汇集而成，也有些不见于前二书的内容，

---

① 《明史》卷 96“艺文志一”.

② ［清］姚之骃.《元明事类钞》卷 18.

③ ［清］万斯同.《明史》卷 385“周述学”.

④ ［清］王鸿绪.《明史稿》卷 281“周述学”.

当另有来源①。

《神道大编历宗算会》是一部数学著作，有16个标题，它们是：第一册卷一“入算”，卷二“子母分法”；第二册卷三“勾股”；第三册卷四“开方”，卷五“立方”，卷六“平圆”；第四册卷七“弧矢经补上”，卷八“弧矢经补下”；第五册卷九“分法互分”；第六册卷十“总分”，卷十一“各分”；第七册卷十二“积法”；第八册卷十三“立积”，卷十四“隙积”、“算会圣贤姓氏”，卷十五“歌诀”。

《云渊先生文集》的数学部分为名数论、总法论、子母分法论、勾股论、开方论、平圆论、截方论、弧矢论、弧容直阔论、背弦差论、互分论、差分论、总分论、各分论、平积论、立积论、隙积论、镕积论，基本上与前书对应。

目前这两部书都很难见到，幸于20世纪70年代末笔者把后一书数学部分抄出。从上列的小题目来看，周述学对数学的研究比较全面，“名数论”主要讲度量衡和进位制。“总法论”主要讲数学的一些基本运算。“开方论”主要讲各种开方法，直到“开五乘方”（即6次）。“截方论”主要讲各种面积的计算，所谓“截方”实是指把各种直线平面图形改变为等积的“直田”，同时也包括一些立体的体积计算问题。“隙积论”主要讲各种垛积的计算等。有一个特点是议论较多，有些很有价值，例如他在“名数论”开头有这样一段话：

“夫物之不齐，物之情也。故其形体有长有短，有广有狭，有多有寡，有轻有重，是以立法，名数以御之。广② 度之以弓尺而长短广狭明；量之以斗斛而多寡审；权之以斤秤而轻重晰，此度、

① 李迪、白尚恕．中国16世纪天文学家周述学．《中国科学技术史论文集》（一）．呼和浩特：内蒙古教育出版社，1991．244～256

② “广”为衍文，应删．

量、权三法为数之纲也。”

上面的引文是说“物”本身有不同形状、大小和轻重，为了表达这些不同就要给它们立法取名，在此基础上形成度量衡。这也就从一个方面说明了他对数学来源的认识。

周述学和前二人一样，没有涉及到天元术，也没有明确讲到珠算。但是周述学的整体科学水平和成就远超顾应祥和唐顺之之上。

第二节　《指明算法》、《盘珠算法》和《一鸿算法》

在周述学等人之前后，有3本珠算书传世。一为《指明算法》；一为《盘珠算法》；一为《一鸿算法》。它们都是现存最早的珠算书之一。

《指明算法》二卷，为明“正统己未江宁夏源泽作”[①]，正统己未为1439年，比吴敬《九章算法比类大全》还早11年！该书原刻本，目前虽然找不到，但有明清间的“校正”本，根据种种迹象表明，应基本上保持原版面貌，因此略加介绍。例如在“福州集新堂”刊本，其上有一“算盘定式”图（如下页图6.3.1），梁上二珠，梁下五珠，有九档，梁上由左向右写“一”到“九”9个数字。在图下有详细说明如下：

“凡算盘每行七铢（珠），中隔一横梁：梁上面二珠，每一珠当梁下五珠。梁下五珠，一珠只是一数。其算盘放于人位前，以人身配之，分其左右：以位前为左，以位后为右。前位为上，后位为下。凡前位一珠，则当后位十珠，故云：‘逢九进十，退十还九’之说。学者照下法行。”

① ［明］程大位．算法统宗．算经源流．

在此说明的下面还有“双调西江月”，即

智慧童蒙易哼，愚顽皓首难明，
世间六艺纷纷，算乃人之根本，
知书不知算法，如临暗室昏昏，
慢同高手评论，数彻无容方寸。

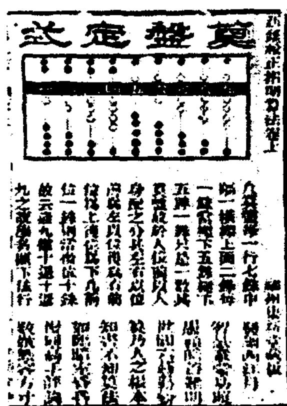


图 6.3.1 《指明算法》

一个半世纪以后，程大位在《算法统宗》有“先贤格言”，叫“改调西江月”，就是把夏源泽的“双调西江月”改变几个字而录入书内。所谓“先贤”至少是包括夏源泽在内的数学前辈。程大位说《指明算法》“九章不全”。他亲自见过这部书，因此说得具体，而且已是明末的 16 世纪末。

由于《指明算法》是一部珠算书，是否可以推知后来的《九章算法比类大全》、《新集通证古今算学宝鉴》等书中的有关部分为珠算内容无疑。从书的叙述来看，不仅是给初学者写的，而且是以前此类书似极少见，也就是珠算刚出现（流行）不久。因我们未见原书，只能介绍这些。

《盘珠算法》二卷，全名为《新刊订正家传秘诀盘珠算法士民利用》，明徐心鲁订正，根据书末出版牌记“万历新岁仲夏月熊台南刊行”，知出于万历元年（1573 年），出版者为熊台南①。

《盘珠算法》是一本普及性的珠算说明书，而且是在传世数学书中可能是首次出现了大量的珠算算盘图，卷前还有一幅似乎像

① 本书仅日本日阁文库藏有原刊本，后来日本儿玉明人将其收入《十六世纪末明刊の珠算书》，又收入河南教育出版社《中国科学技术典籍通汇・数学卷二》，李俨有影摄本.

个官府，其中有一人抱着算盘。书中的算盘图是梁上一珠，梁下五珠，和后来日本所用之算盘相同（见图 6.3.2）。与《指明算法》所载者不同。

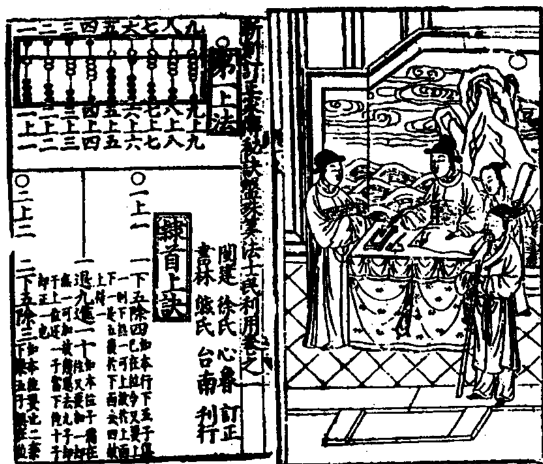


图 6.3.2　《盘珠算法》书影

此书开头从“一上一、二上二、…、九上九”开始，是初学打算盘的作法。然后讲珠算的加、减、乘、除，同时配一些练习题，还有一些诗歌，这是卷一的内容。卷二主要是应用问题，如各种面积的计算等，都很浅显，适合于一般文化不太高的商人或农村土地买卖计算之用。在“金蝉脱壳”中使用“一乘一除”法，对后世有一定影响。

《盘珠算法》出版于福建，大约很少流行于内地，以致在中国不见著录，因此影响很小。但是，通过此书可清楚地了解明代珠算的一些情况，因此在珠算史上是很有价值的资料。

《一鸿算法》四卷，全称是《新刻一鸿简捷便览算法》，刊本

四册（有微残[①]），作者为余楷。在书上没有找到作者署名，因该书卷一开头缺封面、封里、序、目录和正文的前三页，署名可能即随之失去，但在程大位的《算法统宗》中记有“《一鸿算法》，万历甲申银邑余楷作”，则作者为余楷无疑。又在卷三的最后一页刻“万历甲申冬月明雅堂梓，新刻一鸿简捷便览算法三卷终”二行，卷四之末有“万历乙酉岁春月明雅堂绣梓，一鸿算法四卷终”二行，与程大位所记一致。刻书应是在万历甲申年（1585年），到第二年初才刻完。全书四卷的小标题如下：

卷一

……上法初学用（下有缺字）[②]　加法　除法　九九合数　九归歌　定位歌　分法实歌

认物位歌　因法歌　隔位加法　乘法歌　隔位乘法　归法歌　隔位减法

隔位归法　商除歌　通分歌　衰分歌　总论歌

卷二

度之章［度者丈尺名也］　丈量田地歌　制绳　制车　丈田总歌　方类歌诀　圆田类诀　员类弯歌　开平方认商歌　量分厘基用法次序歌　抽路分基歌　抽曲折路法　对换基法歌　圭田截积歌　环田截积歌

卷三

开平圆方歌　立方认商歌　求测高深（歌）　求测高远歌　垛积　狮子滚绣球　金蝉脱壳　断人生死歌诀　算孕妇生男女法

---

① 本书现藏黄山市博物馆，目前仅发现这一部.

② 此小题前边有残损，也许尚有一二个小标题，因此在其前加删节号.

卷四

斤两数以银一钱为则［计每斤得银若干］　以银一两为则［计每斤得银若干］　斤斗数［以银三钱得物若干］　亦升斗数［以物一石该银若干］

根据这些标题可知该书的大致内容。

全书的形式，主要由歌诀和算题构成，共有36首歌和108题，一般是先歌后题，还有些地方有解释和说明，有的很有价值。

《一鸿算法》是一部珠算书，但因前有残损，所以在书中没有一幅算盘图。为什么说是珠算书呢？首先是用语，在书中有“子”和“以一当五”，“子”即算盘珠，“以一当五”即梁上一子当五使用；其次是算法口诀，如：

加减法口诀

加法：一上一，一下五除四，一除九还十。
　　　二上二，二下五除三，二除八还十。
　　　……　……　……
　　　……　……　九除一还十。
减法：一除一，一除十还九，一上四除五。
　　　二除二，二除十还八，二上三除五。
　　　……　……　……
　　　……　……　九除十还一。

“除”是减去的意思，“上”和“下”是指拨算盘珠，拨上，拨下。

除法口诀，即“九归歌”：

一归：逢一进一十。
二归：二一添作五，逢二进一十。
三归：三一三十一，三二六十二，逢三进一十。

四归：四一二十二，四二添作五，四三七十二，逢四进一十。

……

九归：随身下位加一位，逢九进一十。

书中每归之后都配有例题，如二归后面的一问："今有银一百二十四两六钱八分，败布每尺价二分。问：共布若干？答曰：六百二十三丈四尺。法曰：法之二三四五六七八九单位者用之。今置银数为实，以价二分为法，归之即得。" 即以 2 为法的除法（二归），原书的计算步骤[①] 是：

[法] 二分＝

[实] 一百一　一二添作五，变一为五

[实] 二十＝　逢二进一十（本位除破，进一于左）

[实] 四两≡　逢四进二十（本位除破，进二于左，如二次逢，进一十）

[实] 六钱⊥　逢六进三十（本位除破，进三于左，如三次逢）

[实] 八分≟　逢八进四十（本位除破，进四于左，如四次逢）

这是典型的珠算口诀。计算步骤中未出现商，实际上是在算盘里。其他归之算题也是这样，如九归之题有"九二下加二，本位不动，右位加二"，更具珠算特征。

《一鸿算法》中还记载了明代关于丈量土地的资料，作者余楷亲自参加了这一工作。上一章所讲的程大位也参加过，可见当时参加的人较多，精通数学者便把此事写进书中。为了丈量工作的需要，人们发明了不同的丈量工具，程大位有"丈量步车"，而余楷则有"制绳"和"制车"之作。制绳是：

---

① 原文为上下直书，法、实分别列于左、右. 今改为横书列为上、下. 但口诀中的"左"系指进位于左，即高一位的档.

“制绳：天煮苧麻，纫松线如网巾。绳大百丈，剪皮如指节大，青线剌数，缚于各丈。遇埢凹曲，以绳准补定数。此绳松不伸缩，煮能坚韧。予用以量铁锐，绳全。”

这是说用100丈长的大绳子，在每一丈处作一记号，用以拉绳丈量。但对作绳的麻要进行一些脱胶等处理，使其减少伸缩性。这是一种非常简单的丈量工具。

“制车”的制作和使用，如下：

“制车：现在用尺围竹，约长四尺。上半两节约尺五，留两头部，隔锯剖两旁，如灯笼架样。中窍以铁轴，曲一头为搅，贯尺五长蔑六片，如纺车形，收放皮绳。竹前中部留一齿，阔、高各半寸，开方孔，下加牕管为滑。中部之下，锯剖，前留掌阔一柄。用则拄地。按顶则收缩省力，行则如伞而肩之，且免践害秋麦，当低处则卧车而牵之。”

书中没有图形，已据上引资料给出了一幅推想复原图（图 6.3.3）。现在对资料作一简单解释。

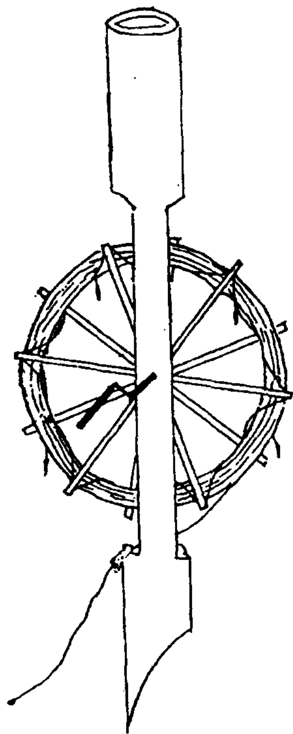


图 6.3.3“制车”推想复原图
（采自《自然科学史研究》12：2）

取围长1尺、干长约4尺的竹子，上半段留下1.5尺左右的部分，下端也留下一段，中间从两侧锯下，使成通槽形，估计槽长在1.7尺许，即所谓“灯笼架样”。再在通槽槽壁正中横穿二个孔，安装一根带摇柄的铁轴。把长1.5尺的6片竹篾穿于通槽内铁轴上，“如纺车形”。用皮绳绕于竹篾端部，而又互相连接，起“收放皮绳”的作用，绳绕其上。

还要把下段削成掌形尖状，又在通槽的下端一边安装一管状滑溜，使丈量皮绳从中顺利通过。使用时垂直插于地面，一人捺住，另一人从管状滑溜中拉出皮绳，进行丈量。

制车与程大位丈量步车相比，显得原始，但在实际作用上完全一致，而且制作简单，易于推广。

如果把上二书进行比较便发现：二者有不少相同的内容，特别是有些内容在叙述文字上几乎完全一样，例如“金蝉脱壳”，两者连例题都无差别。由于人们一般不易看见《一鸿算法》原书，现将其卷四的一部分内容列下，可与《盘珠算法》相对照：

○二钱一石算 [每钱该五斗]

二钱一分一石 [每钱四斗七升六合]

二钱二分一石 [每钱四斗五升四合]

二钱三分一石 [每钱四斗三升四合]

……

○三钱一石算 [每钱二斗一升三合]

三钱一分一石 [每钱三斗二升二合]

三钱二分一石 [每钱三斗一升二合]

三钱三分一石 [每钱三斗零三合①]

……

一两二钱一石 [每钱八升三合三勺]②③

还有些其他地方两者也一样，而《一鸿算法》晚出，可见它吸收了《盘珠算法》的部分内容，又有所发展，加进了不少新东西。

---

① 《盘珠算法》中无“三合”二字.

② 《盘珠算法》只到“一两一钱一石”.

③ 李迪，王荣彬. 明代算书《一鸿算法》研究. 自然科学史研究，1993，12 (2)：112～119

第三节　《数学通轨》与《算法指南》

《数学通轨》和《算法指南》也是两部珠算书，内容比较浅易，都流传不广，影响也不大。但在珠算方面同样是不可多得的资料，现简介于下：

《数学通轨》不分卷，全称为《曲礼[1]外集补学礼六艺附录数学通轨》集之十五，作者为柯尚迁，书前有柯尚迁“万历六年五月端阳日”自序，知是书完成于1578年，比《一鸿算法》早7年，而在《盘珠算法》之后5年。前后12年出了3部珠算书，可见当时社会对此类书籍的需要情况。这3部书互有影响，前已述及《一鸿算法》受到《盘珠算法》的影响问题，实际上也受到《数学通轨》的影响，如加法口诀的一些句两者一样，实际上三者都差不多。

柯尚迁在序中主要是讲他对数学的一些理解，基本上是接受了宋代象数学的观点，认为“天地之始一气而已，气之运动而自然者为理。有气而后有象，有象而后有数，故数亦理之形见者，数以齐乎气，不外乎阴阳一阖一开之变而已。”然后他又讲了为什么要在《曲礼》之外增加数学和人生于世不论贵贱都要学习数学的道理，接着讲述了一些数学内容，是《数学通轨》一书的要点。此外柯尚迁还写了一本《书学通轨》，均附于《曲礼》之后。

《数学通轨》不分卷，但分为4部分，各有名，即“第一学算须知”、“第二归除诠要”、“第三九章释例”和“第四九章总义”。第一部分开头是“数原”，讲数的生成和进位制以及度量衡。然后给出了“初定算盘图式”，梁上二珠、梁下五珠（下页图6.3.4），与《指明算法》相同，而与《盘珠算法》的梁上一珠不同。柯尚

---

① “曲礼”为古代经典《仪礼》之别名.

迁说是“初定”，难道是在他写《数学通轨》前不久才又把梁上一珠改为梁上二珠？

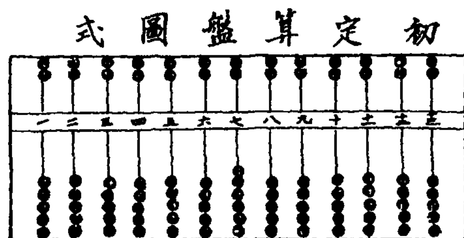


图 6.3.4 《数学通轨》“初定算盘图式”

在第一部分中给出了一些打算盘的图式，如“九九进退图式”10幅，由“一上一，…九十九”到“一还一，…九退十还一”；“习九九数总念歌[乘除加减皆呼此数]”，在九九口诀之后又有算盘图式8幅，系连接前10幅而来。接下去的部分主要讲珠算乘除法，除了一些因乘、九归、撞归等口诀外，有一幅“算盘法实数”图和因、归图式各8幅。

有了这些图式便于初学，内容和形式与《盘珠算法》本质上相同，仅图式下的口诀略有差别。

第二部分是对归除的一些解释，同时配备了练习题。其中对“定身除法”讲得比较详细：“定身除者，先定实之身数，后除实之余数，即减法也。但法首位一、一十、一百、一千、一万之数可用此法，其法首位一数，又要除去，只呼法之次位。”意思是在除数的首位为1时的除法，实为以减代除的简捷除算法。

第三部分是按九章的名义，讲述一些计算问题，目录[1]如下：

一曰方田：等田截法、田亩积步求田法。

二曰粟米：异乘同除法为例、同乘同除法。

三曰差分：二等贵贱差分法、三等差分法、四等差分法。

四曰少广：斛法、量船装载、尖堆垛法。

五曰商功：量土方数法。(工人脚价法)[2]、(诸葛赏军法)

六曰均输：异除同除法。

七曰盈朒：异乘同除、同乘同除。

八曰方程：除法例、乘法例、棉花求银法、银求棉花法。

九曰勾股：度影量高法、勾股弦容方圆图、《测圆海镜》总率名谱。

第四部分在内文中缺标题，目录上的“九章总义”也没有写出。内容为顾应祥《测圆海镜分类释术序》和唐顺之（荆川）对数学的一些议论。

后 3 部分都没有算盘图式。

全书水平不高，是为儒家之需而撰写的。柯尚迁，长乐（今福建长乐县）人，字桥可，自号阳石山人。嘉靖中任贡生官邢台县丞[3]。可以说柯尚迁是一位普通文人，而不是数学家。

《数学通轨》出版之后 25 年，又有黄龙吟的《算法指南》问世，此书也晚于《一鸿算法》和《算法统宗》。黄龙吟，名嘘云，号高源里人，龙吟，其字也，新都（今四川新都）人，生卒年不详。还撰有《新镌田地山塘麦米活法》（不分卷）、《新选治生要览》（分中、和二集），后者的中集为《江湖切要物价规略》，和集

① 书前的目录与书中的标题不完全相同，此处所列系据书中标题.

② 此标题与下一标题书中均无，但有问题.

③ 李俨.《中算史论丛》第二集. 北京：科学出版社，1954. 96

不涉及数学问题[1]。上述几种书均同时于万历三十二年（1604 年）出版，李俨藏有万历刊本《算法指南》。

《算法指南》二卷，全名为《新镌易明捷径算法指南》，前有“京板进士文林郎星源贞吾汪一栋书”的引，每卷之署名为“新都嘘云黄龙吟编辑、明吾汪一诚校梓”，汪一诚与汪一栋应是兄弟。

《算法指南》为启蒙性的珠算书，上卷的前半部分为珠算算法的初步知识，先讲口诀和算盘打法，配有打法图式。后半部分只有例题，而无图式。

上卷开头讲珠算盘的形式及用法，可能是录自《指明算法》一书的，即

“夫算盘，每行七珠[2]，中隔一梁，上梁二珠，每珠当下梁五珠也。下梁五珠，一珠只是一数。算盘放于人之位次，分其左右上下，右位为前，左位为后，前位为上，后位为下。凡前位一珠当后位十珠，故云：逢九还十，退十还九之说。上法退法九归归除皆从右起，因法乘法俱从左起。”

这里明确地说每行七珠，梁上二珠，梁下五珠，但是书中的 35 幅图式只有 1 幅为梁上二珠，其余均为一珠，估计是为了雕版时省事而采取的变通做法，实际上在一般情况下，梁上一珠已够用。

下卷都是些简单算题，是为练习打算盘而选的题目。本卷有“隔位归除法”和“隔位乘法”，分别指除数的次位为零的除法和相乘两数的次位为零的乘法，与传统的性质不同。又“金蝉脱壳法”只用一进一除，每次得商为一，是《盘珠算法》中“二字”法

① 郭书春．算法指南提要．载《中国科学技术典籍通汇·数学卷二》．郑州：河南教育出版社，1993．2—1423

② “珠”原书均为“铢”，现改为习惯用字．

的发展[1]。

该书和前人的珠算书一样，有大量的诗歌，这是元末以来数学著作的一种潮流。书末有些荒诞不经的算题和迷信算题，也是受前人的影响所致。

第四节　朱载堉与邢云路的工作

朱载堉和邢云路是明代后期的两位科学家，与程大位同时。前者是乐律学家，后者为历法家，都不是专业研究数学的学者，可是却在数学方面取得了一些成果，都得益于他们各自工作的实际需要。

朱载堉（1536～1611）字伯勤，号句曲山人，明宗室郑恭王朱厚烷世子。但是在嘉靖二十九年（1550 年），他父亲朱厚烷被削去爵位，他当时 15 岁，发奋攻读，主要是学习和研究音乐学，后来也研究历法，由于需要，对数学同样下过功夫。朱载堉的著作很多，据统计有 23 种，包括乐律学、数学、历法、乐谱、音韵等许多方面[2]。其中与科学直接相关的著作有：《律学新说》四卷、《律吕精义》内篇十卷及外篇十卷、《算学新说》不分卷、《圣寿万年历》二卷、《万年历备考》三卷、《律历融通》五卷、《嘉量算经》三卷、《圆方勾股图解》等。这些著作只有少数的失传，大都传到现在，《嘉量算经》等尚有明刊本。

朱载堉在科学上的最大贡献是对乐律学上的十二平均律计算问题的解决。这个问题是这样：其生律法是精确规定 8 度的比例，

---

① 华印椿．中国珠算史稿．北京：中国财经出版社，1987

② 戴念祖．朱载堉——明代的科学和艺术巨星．北京：人民出版社，1986．38～46

并把 8 度分成 12 个半音，使任意相邻的两个半的音程值为 $\sqrt[12]{2}$①。这种算法朱载堉在世界上是首次使用，在国际上得到公认。

朱载堉由于研究乐律的需要，建立了 9 进制和 10 进制的小数换算。他的这项工作载于《律学新说》卷一，是在研究律管的长度时注意到这个问题的。换算的演算用算盘进行。

已知 9 进制小数换算为 10 进制小数，他举例如下：

“大吕纵黍律长 8.376 寸②，大吕横黍度长 9.364 42 寸。置 8.376 寸在位，先从末位毫上算起，用九归一遍，得 6.66 毫奇；却从次位厘上算起，再九归一遍，得 8.518 厘奇；又从次位分上算起，再九归一遍，得 4.279 8 分奇；又从首位分上算起，再九归一遍，得 9.364 42 寸奇。余律皆放（仿）此。”

朱载堉用 4 次九归把大吕③纵黍律长 8.376 寸（9 进制）换算成 10 进制的大吕横黍度长 9.364 42 寸。

朱载堉又用实例演算把 10 进制小数换算成 9 进制小数：

“大吕横黍度长 9.438 74 寸，大吕纵黍律长 8.440 67 寸。置 9.438 74 寸为实，初九因至寸位住，得 8 寸；又九因至分位住，得 4 分；又九因至厘位住，得 4 厘；又九因至毫位住，得 0 毫；又九因至丝位住，得 6 丝；又九因至忽位住，得 7 忽。凡九因六遍，共得 8.440 67 寸，为大吕（纵黍度长）。余律皆放（仿）此。”

这就把 10 进制的大吕横黍度长 9.438 74 寸换算成了 9 进制的大吕纵黍律 8.440 67 寸。

朱载堉把上面的换算总结成法则，他说：“律度相求诀曰：从微至著，用九乘除，纵横律度，契合图书。”他更进一步予以解释：

---

① 戴念祖．朱载堉——明代的科学和艺术巨星．北京：人民出版社，1986．47

② 原著中的汉文数目字，改为阿拉伯数码，下同．

③ “大吕”古代乐律十二律的一个名称．

"若置纵黍之律以求横黍之度，则用九归；若置横黍之度以求纵黍之律，则用九因。反复相求，各得纵横二黍律度。"[①] 这是讲的 9 进制与 10 进制换算的法则。很显然，此法则适合于不同进位制与 10 进制的换算，只要把"九归"和"九因"改一下即可。实际上，可以推广到任何不同进位制间的换算。

朱载堉是打算盘的能手，上面的换算全用算盘演算。但是不止于此，他更讲算盘进行开平方和开立方[②]，假如开到好多位时，普通算盘不够用，他想出来两种办法，写道："凡学开方，须造大算盘，长九九八十一位，共五百六十七子，方可算也。不然，只用寻常算盘，四五个接在一处算之，亦无不可也。其算盘梁上贴纸一长条，上写第一位、第二位等项字样，使初学易晓也。""凡开立方，将算盘梁上贴纸一条，写千百十寸、百十分、百十厘、百十毫、百十丝、百十忽、百十微、百十纤之名，至于纤以下位数，不立名色，只隔二位一圈，使开方除实不错耳。"[③]

这是朱载堉提倡用 81 档的大长算盘或四五个普通算盘连接起来进行开平方或开立方的办法。他还首次给出了开平方和开立方的珠算口诀，并举出了详细算例。

朱载堉研究十二平均律时，用到了等比级数，还研究过圆周率等等。

朱载堉是明代后期重要科学家，在数学方面也做出了贡献。

邢云路字士登，安肃（今河北徐水）人，万历庚辰（1580 年）进士，官至陕西按察司副使。他主要研究历法，特别是对古代历法的辨证研究尤多，所著有《古今律历考》七十二卷、《戊申立春考证》一卷，对《授时历》和当时行用的《大统历》等多所

① ［明］朱载堉．律学新说卷一"约率律度相求第二"．

② 珠算开方已见于《新集通证古今算学宝鉴》．

③ ［明］朱载堉．算学新说．

指摘，但后人对他的一些看法也提过某些批评。

邢云路在研究《授时历》时引述了其中的招差术，本书第三编第三章已讲过。引述之后说："以上授时旧法"，接着是"又法，新立"①。王恂在《授时历》中把3次招差降阶为2次，而邢云路则直接用3次差，并给出了3个差分表和求定差、平差和立差的计算步骤。现以"推盈初缩末定差平差立差"为例加以说明。邢云路说："以所测就整之数，盈初缩末八十八日九十二刻。分为六段，每段得一十四日八十二刻。二因为二段，三因为三段，四因为四段，五因为五段积日。"其中88日92刻是指由冬至点到秋分点或春分点的时间，把它平分为6段，每段为14日82刻，然后得到各段积日和测得各段积差，于是在此基础上造出3次差分表：

段数	积日	积差	一差$\triangle_1$	二差$\triangle_2$	三差$\triangle_3$
1	14日82刻	70刻 570 162 45			
			49刻 158 828 26		
2	29日64刻	1日29刻 728 991 71		12刻 016 756 30②	
			47刻 142 071 96		60分 542 111
3	44日46刻	1日76刻 871 063 67		12刻 622 177 41	

① ［明］邢云路．古今律历考．卷68

② 有些版本缺零（0），现校补．

（续表）

段数	积日	积差	一差$\triangle_1$	二差$\triangle_2$	三差$\triangle_3$
			34 刻 51 989 455		60 分 542 111
4	59 日 28 刻	2 日 11 刻 390 958 22		13 刻 227 598 52	
			21 刻 29 229 603		60 分 542 111
5	74 日 10 刻	2 日 32 刻 683 254 25		13 刻 833 019 63	
			7 刻 459 276 40		
6	88 日 92 刻	2 日 40 刻 142 530 63			

邢云路在表后说："术：置段日下积差，以多减少，得一差。置一差，以多减少，得二差。置二差，以多减少，得三差，则数皆同矣。"差分的造法是后项（差）减前项（差），即后积差－前积差＝$\triangle_1$，后$\triangle_1$－前$\triangle_1$＝$\triangle_2$，后$\triangle_2$－前$\triangle_2$＝$\triangle_3$。上面差分表中的$\triangle_3$全相等，但是从表中可知$\triangle_2$、$\triangle_3$均为负。

邢云路的目的是要求出"三差"，根据他给出的计算术文，则相当于下面的公式

$$\text{定差}=\frac{\dfrac{\triangle_2-4\triangle_3}{2}+\dfrac{\triangle_3}{6}+\triangle_1+\triangle_2}{l}$$

经整理有

$$定差=\frac{6\triangle_1+9\triangle_2-11\triangle_3}{6l}$$

$$平差=\frac{\triangle_2-2\triangle_3}{l^2}$$

$$立差=\frac{\triangle_3}{l^3}$$

其中 l 为第一段积日，$\triangle_1$、$\triangle_2$ 均为第一段之差。“三差”之说起源于《授时历》，邢云路与其不同之处是先求出三阶差分，由 3 次差直接计算，而《授时历》先降阶，因此只用 2 次差。实际上是等价的。

邢云路在《古今律历考》中因研究《授时历》而多次提到立天元一，估计他懂得天元术，但在他的研究中尚未找到应用天元术的例子。

从总体来看，朱载堉和邢云路的数学水平在明代还是比较高的。

第五节　珠算起源问题

本编主要讨论了以珠算为主的明代数学，当时珠算已在全国普及，可是是什么时候发明的，也就是起源于何时的问题未来得及讨论。

目前对珠算起源问题的看法，存在很大分歧。总的趋势是往前提，明代已经普及，但是非常奇怪的是，直到 14 世纪初，在数学著作中除《发蒙算经》外都没有明确提到“算盘”或“珠算”这类词。尽管其中的某些内容明显是配合珠算的。当时，珠算已相当流行了，例如与吴敬同时代的马欢曾于 1421 年和 1431 年两次随郑和（1371～1435）船队下西洋，1451 年他写了出国见闻。当他写到古里国（Calicut）时说：“古里国…彼之算法，无算盘，只

以两手脚并二十指计算，毫厘无差，甚异于常。”[①] 这里的算盘无疑是珠算盘，如是筹算盘则应直接称“筹”才是。珠算盘的比喻出现在元代末期的著作《辍耕录》中，该书说：“凡纳婢仆，初来时，曰擂盘珠，言不拨自动。稍久，曰算盘珠，言拨之则动。既久，曰佛顶珠，言终日凝然，虽拨言不动。此虽俗语，实切事情。”[②] 其中“算盘珠”能拨动，说明是珠算盘。

最早的算盘图见于《魁本对相四言杂字》，目前见到的有明洪武四年（1371 年）印本，10 档，梁上二珠，梁下五珠（图 6.3.5），和前述《指明算法》和《数学通轨》中的算盘图式一致。但在算盘之下并列有算子图，说明当时筹算仍在继续使用。可是这本书的原始版本也可能更早。例如程贞一对一个不知年代的版本进行了汉字写法的研究，认为可能是宋代的[③]。宋代已有算盘，可以肯定。

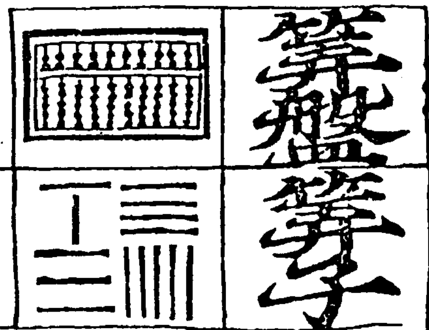


图 6.3.5

人们讨论到的宋元时代的资料中至少还有二项与算盘图有关：其一是宋代张择端《清明上河图》中“赵太丞家”药店的帐桌上有一长方形物像是算盘，有人提出了这一问题，但有人认为是一个放铜钱的“钱板”。经仔细观察，该图不像算盘。其二是元

① ［明］马欢．瀛涯胜览・古里国．

② ［元］陶宗仪．南村辍耕录卷 29，“井珠”条．

③ Joseph Cheng－Yi Chen 著，加藤政弘沢．現存最古の中国とうばん図の年代推定．珠算史研究第 15 号．1986．3～14

代画家王振鹤在至大三年（1310年）所画的“乾坤一担图”上货郎担上有算盘图。这幅图比较清楚，可以认定为算盘图无疑。由此可见，在元代民间已有算盘流行。

宋代有的数学书名叫《走盘集》，有的叫《盘珠集》，有人认为可能是珠算方面的著作，但因无任何资料可供参考，所以难下结论。

在谢察微的《发蒙算经》中明确记载了算盘，该书被断定为五代后期的作品①，因而说明当时在民间已有了算盘。

时代还可往上推，有人主张算盘发明于唐代，是否确是如此，尚需进一步研究。有一个问题必须认真对待，即“珠算”一词出现于《数术记遗》，该书为汉末徐岳所撰，而其资料又来自其师刘洪。刘洪为山东蒙阴人，因此山东人认为刘洪是珠算的发明者，称其为算圣，并拍成电视片。至于刘洪的“珠算”是什么样子，因记载过于简略，又无图形，后来人们靠甄鸾注释进行复原研究，中外研究者至少给出了15种推想图②，有些大同小异，有的差别稍大。

1978年在陕西岐山凤雏村出土90多粒西周时期的陶丸，引起珠算研究者的注意，进行了许多讨论，有人认为可能是最早的古算珠。

根据以上所列举的资料，目前还很难得到一个珠算发明年代的确切答案。实际上，珠算的发明和其他不少发明一样，可能不是一下子完成的。中国传统数学计算工具，从春秋战国时起普遍使用筹算，到汉代数学家能得心应手地进行算术四则和开平方、开

---

① 李迪，冯立升.《谢察微算经》试探. 中国数学史研究文集第三辑. 呼和浩特：内蒙古大学出版社；台北：九章出版社，1992. 58～65

② 日本《珠算史研究》第15号（1986）上有8幅、第41号（1997）上有5幅，李迪. 中国数学通史（上古到五代卷）. 上有1幅，《内蒙古师大学报》（自然科学版）1989年第1期“科学史增刊”中有1幅.

立方运算，唐宋时期达到鼎盛。可是这不能完全阻挡住人们的创新欲望，《数术记遗》中所记载的“珠算”及其他算具有可能是一些设想，也未真的造了出来，但是它们和筹算完全不同。《数术记遗》在唐代列为明算科的兼习教材，人们对其中珠算一说的记载肯定都知道，有个别人进行制造乃是情里中事。如果说唐代有了原始算盘不为过份，经过改进到五代时已成了接近后来形态的算盘，《发蒙算经》中有了记载亦非偶然。估计五代时，算盘已在民间有一定流传，宋元时逐渐发展和普及，到明代时已成为最主要的计算工具。

由《数术记遗》及甄鸾注的“珠算”来看，最早的算盘应是梁上一珠、梁下五珠，《发蒙算经》中所记者也不会例外。因计算上的需要，可能在宋代出现了梁上二珠的算盘，两种并行，一直到明代中期还是这样，后来才基本上以梁上二珠的算盘占了主导地位。传到日本的算盘也可能是两种都有，而采用了梁上一珠的形态。

总之，珠算的发明可能较早，但发展和普及较慢，大约是先在民间流传，经过几百年的岁月才被人们普遍接受。

第四章　对明代传统数学的评价与中外交流

本章是对明代传统数学的总结，主要讲两个问题，一是对明代传统数学的评价；一是中外数学交流。

第一节　对明代传统数学的评价

明代传统数学是指到1600年前后不受西方数学影响的数学，前后约跨230多年。在这段时期里完成了多少种著作呢？程大位曾列举了由永乐二十二年到万历戊子（1424～1588）的数学著作18种[①]，实际上缺漏的相当多。据李俨的著录，已达73种[②]，比程大位列举的高出4倍之多，其中能判定为未失传的有17种。李俨的工作虽然十分认真，在当时来说已相当完备，可是此类工作是不可能做到毫无遗漏的程度。近年仍有新的发现，尤其是原来认为失传的“算书”现今又找到了，等等。到目前为止，本书的统计，明代传统数学著作有将近80种，现存的有17种，它们是：

1. 《指明算法》二卷，夏源泽于正统四年（1439）撰，有校订本。与原本是否相同，尚需研究。

2. 《九章算法比类大全》十一卷，吴敬于景泰元年（1450

---

① ［明］程大位．《算法统宗》卷17.

② 李俨．明代算学书志．收入《中算史论丛》第二集．北京：科学出版社，1954．86～102

年）撰，有明弘治元年（1488 年）刊本（北京[1]、北京大学），收入《通汇》[2]。

3.《算学宝鉴》四十一卷，全称是《新集通证古今算学宝鉴》，王文素于嘉靖元年（1522 年）定稿，有抄本（北京），收入《通汇》。

4.《勾股算术》二卷，顾应祥于嘉靖癸巳年（1533 年）撰，有嘉靖癸丑（1553 年）刊本（浙江）和嘉靖丁巳（1557 年）郑烛跋本（北京），收入《通汇》。

5.《测圆海镜分类释术》十卷，顾应祥于嘉靖庚戌年（1550 年）撰，有同年刊本（浙江），收入《通汇》。

6.《弧矢算术》一卷，顾应祥于嘉靖三十一年（1552 年）撰，有嘉靖癸丑（1553 年）刊本（浙江）、《四库全书》和清道光癸卯年（1843 年）刊本，收入《通汇》。

7.《测圆算术》四卷，顾应祥于嘉靖癸丑（1553 年）撰，有同年刊本，收入《通汇》。抄本一册（李俨[3]）。

8.《神道大编历宗算会》十五卷，周述学于嘉靖三十七年（1558 年）撰，有抄本（南京）。

9.《盘珠算法》二卷，全称为《新刻订正家传秘诀盘珠算法士民利用》，徐心鲁于万历元年（1573 年）订正，有万历新岁（1573 年）刊本（日本内阁文库），收入《珠算书》[4] 和《通汇》。

10.《数学通轨》，为《曲礼外集补学礼六艺》附录之第十五，称“数学通轨集之十五”。柯尚迁于万历六年（1578 年）撰。有原写本（日本尊经阁文库）、写本（日本神宫文库）、抄本（李俨）、

---

① “北京”系北京图书馆简称，括号内的均仿此.

② “《通汇》”指河南教育出版社出版之《中国科学技术典籍通汇》中的数学卷.

③ 原李俨藏书. 现藏中国科学院自然科学史研究所图书馆.

④《珠算书》系指日本児玉明人所辑之《十六世纪末明刊の珠算书》，富士短期大学出版部.

日本宽文十二年（1672年）翻刻本，收入《珠算书》和《通汇》。

11.《一鸿算法》二卷，全称为《新刻一鸿简捷便览算法》，余楷于万历甲申（1584年）撰，有万历乙酉年（1585年）刊本（安徽省徽州地区博物馆）[①]。

12.《算法统宗》十七卷（或十二卷、十三卷），全称为《新编直指算法统宗》，程大位于万历壬辰年（1592年）撰，同年刊印[②]。收入《通汇》。

13.《算法纂要》四卷，全称为《新编直指算法纂要》，程大位于万历二十六年（1598年）撰，同年刊印[③]。收入《珠算书》。

14.《算学新说》，朱载堉撰，万历年刊本（李俨）。

15.《算法指南》二卷，全称为《新镌易明捷径算法指南》，黄龙吟撰，有万历三十二年（1604年）刊本（李俨），收入《通汇》及《珠算书》中收入几页。

16.《嘉量算经》三卷，朱载堉于万历三十八年（1610年）撰，有明万历刊本（北京、上海）、清乾隆年重刊明万历刊本（故宫）、朱丝栏抄本（故宫）[④]等。

17.《九龙易诀算法》二卷，有联捷堂刊本，年代不详（日本内阁文库）。

除上述17种外，还有3种情况要说明：第一，有些只有佚文的书这里未收，如明初的《应用碎金》、严恭《通源算法》等，尽

---

① 详细参见李迪，王荣彬．明代算书《一鸿算法》研究．自然科学史研究，1993，12（2）：112～119

② 此书的版本情况，请见李迪．国内收藏的明刊本与抄《算法统宗》与《算法纂要》．中国数学史论文集（二）．济南：山东教育出版社，1986．48～55

③ 此书的版本情况，请见李迪．国内收藏的明刊本与抄《算法统宗》与《算法纂要》．中国数学史论文集（二）．济南：山东教育出版社，1986．48～55.

④ 此两版本根据邓衍林编《北平各图书馆所藏中国算学书联合目录》著录.

管它们已被收集起相当多的佚文[①]，但不是完整的著作；第二，包括在其他著作中的数学内容，不能独立成为一部数学书籍；第三，有的著作的年代不好断定，如北京图书馆北海分馆藏有抄本《算法统宗释义》与《算法统宗》合订一起，题"平舒任天傅国柱上卿父手著"，图书馆注明为"明钞"本，证据不充分。还有《诸家算法及序记》的年代也不好定，可以使用其中的资料，但很难说明它是明代著作。

这样看来，明代数学著作流传至今的不到20种，很可能还有未发现的。如《一鸿算法》曾经认为早已失传，可是在一个不显眼的地方找到了。这种情况仍然存在。

明代的数学著作大量失传，就以《算法统宗》著录的18种而论，流传至今的只有6种（《指明算法》不是原本）。失传的年代大约是在明末清初的几十年间，是什么原因造成的？一是战争，程大位之后只有半个世纪多点，明朝就灭亡了。在这之前就有许多地方农民起义，清灭明的战争延续了好多年，必然会对图书起损坏作用。一是某一二种著作起代表作用，使其他著作降到了次要地位，《算法统宗》就是起代表作用的著作，它可以在一定程度上代替别的著作。《算法统宗》的影响之大超过了所有明代传统数学书[②]，其他书无人问津，自然要消亡，现在能看到的若干种仅是幸存下来的而已。

明代的传统数学在中国数学史上处于何种地位呢？应从两个大方面进行讨论。

第一方面是中国数学史上的一个转型期，从元代末期开始，一直是沿着实用性、技巧性的方向发展。技巧性表现在计算上，围

---

① 参见李俨．十三、十四世纪中国民间数学．北京：科学出版社，1957

② 冯立升．《算法统宗》产生巨大影响的原因．新珠潮，齐齐哈尔：1986（4）：21～25.

绕着它编写了大量口诀、诗歌，因此又反映出很强的文学性①。整体上，商业性很强，与欧洲中世纪末期的数学有点类似。据载，17世纪以前，欧洲出版了不下300种算术书，一部分是用于教会学校的水平高的教科书；另一部分是用于培养搞商业的学生的学习，注重实用。其中最有影响的商业数学有意大利不知作者的《特雷维索算术》(Treviso Arithmetic，1478年)、博尔吉 (P. Borghi) 的商业算术 (1484年)，德国克贝尔 (J. Köbel，1470～1533) 的著作 (1514年)、里泽 (A. Riese，1489? ～1559) 的商业算术书 (1522年)，在英国也有类似的著作出版，有的书至少出了22版②。这些书都是为商业服务的，重点在计算方面，追求技巧。几年前有一本讲15世纪新数学的著作叫《资本主义和算术》③，充分反映了这一点。

在中国，没有像欧洲那样的教会，因而也没有用于教会的数学教科书，除了顾应祥等少数著作外，都是实用型的，有很强的商业性质，同时也包括了有关土地丈量与买卖等其他内容。

由上述诸方面便决定了中国传统数学的另一个突出特点：大众化。这些书大都适合一般老百姓，特别是商人使用。有的书名本身即已明确表明，如《盘珠算法》的书名中就有“士民利用”4个字，其中有“民”。

第二方面是珠算得到普及。珠算与传统的筹算相比有不少优点，最主要的一点是直接在算盘上拨珠，速度很快，而筹算每计算一步就要重摆某些算筹。还有一点也不能忽视，就是从宋代以

---

① Li Di. The Literary Problems in the Mathematical Works of Ming Dynasty in China. Journal of the Cultural History of Mathematics. Vol. 1，1991. 19～27

② [美] H·伊夫斯著，欧阳绛译. 数学史概论（修订本）. 太原：山西经济出版社，1993. 207～208

③ Frank J. Swetz. Capitalism and Arithmetics (The New Math. of the 15th Century). Open Court Publishing Company，1987

来出现了以笔代筹的趋势，笔算开始萌芽①。笔算的一个优越性是可以保留运算过程的每一步，便于检查。于是，在明代，珠算逐渐普及，筹算不得不退出历史舞台，到1600年以后更由于西方笔算的传入，中国传统的筹算已完全被淘汰。明末时，人们已不知筹算为何物。

明代传统数学的整体水平不高，重要或较重要的创造不多，无法与宋、元相比，也没有达到隋唐时代的发展程度。究其原因主要有二：首先是客观需要不高，中国数学的发展长期受历法影响，得惠于历法，差不多每次历法改革都给数学增添新的内容，促进数学发展。就连邢云路对《授时历》的研究，在数学上还有新的进步。但是明代没有改革历法，也就失去了推动数学发展的一种强有力的动力。其次是没有出现高水平的数学家。在明一代的数学家缺乏开拓精神，除了在一些较小的问题上有创新外，连前人的高水平成果都未掌握。不懂得天元术成为后人的笑柄；秦九韶的《数术大略》尽管有孤抄本流传，而无一人进行深入研究；朱世杰的两部著作竟致在国内失传，等等。因为在中国数学研究是非常自由的，研究什么，怎样研究，从来无人干涉。明以前除《九章算术》等极少著作外，多数都是研究者自己的选题。明代也是一样，都是自定题目，但无人选那种创新性强、水平高的课题进行研究。

在流传下来的17种著作中（有1种不是原本），从水平上看，吴敬的《九章算法比类大全》、王文素的《算学宝鉴》、周述学的《神道大编历宗算会》、余楷的《一鸿算法》和程大位的《算法统宗》5种著作水平较高。

明代数学的这种状况具有时代特征，不是数学家本身的问题。

---

① 李迪．宋元时期数学形式的转变．中国数学技术史论文集（一）．呼和浩特：内蒙古教育出版社，1991．219～233

研究者所想的是如何普及和应用，而不是创造高水平的新成果。

第二节　中国和伊斯兰地区的数学交流

中国和伊斯兰地区的数学交流已在本卷第三编用一章的篇幅对13世纪的交流情况进行了讨论。本节专门论述和中亚的交流与写算的来历。

中国和中亚，特别是建国于撒马尔干的跛帖木儿（Timur the Lame 或 Timurlane）系，与中国的关系较为密切。跛帖木儿为成吉思汗后裔之女支[①]，他的孙子即有名的乌鲁格别克（Ulûgh Beg，1394～1449）对天文学和数学非常感兴趣。在撒马尔干建有一座天文台，那里有不少数学家和天文学家在工作，其中最著名的是阿儿·卡希（Ghiyāth al-Din Jamshid al-Kāshī）和伊本·马哈穆德（Salāh al Din Mūsa ibn Mahmud（Qādī Zāda）），前者著《算术之钥》（The Key of Arithmetic，1427年）和《圆周论》（The Treatise on the Circumference，1424年）二书，有的内容可能受中国影响[②]。乌鲁格别克还从中国和印度请天文学家到那里去传播中印天文学，有一段资料如下：

"大约五六年以前，即夏合鲁哈·米尔扎逝世以前，师傅花许多银子，从印度和中国请来了两位著名的学者。不久，那位印度学者还没来得及译完印度天文学名著《斯底哈伊塔》(Sidhaita)，便与世长辞了。而来自中国的那位能言善辩的老公嘴儿学者在乌鲁格别克经学院攻读了几年波斯语和突厥语，并初步掌握了阿拉伯语。当他能用突厥语通话时，把从中国带来的几本著作译成了突

① 李俨.《中国数学大纲》上册（修订本）.北京：科学出版社，1958. 291

② 杜石然.试论宋元时期中国和伊斯兰国家间的数学交流.宋元数学史论文集.北京：科学出版社，1966. 241～265

厥语和波斯语。然而，他也未等完成自己的使命，便借口思念故乡，跟随去中国的商队返回家乡去了。他所留下的是古代中国三卷本的天文学著作之波斯文译本。”①

引文中所说的“师傅”是指当时为国王的乌鲁格别克。被请去的中国学者是谁，实无从查考，而他译成波斯文的三卷中国古代天文学著作是何书，同样无法了解。估计应是比较著名的，而且可能是一部历法。中国在明代以前专门的天文学著作并不多，《周髀算经》是最重要的，可是它为二卷，而不是三卷。

乌鲁格别克的主要贡献是他组织人编写了著名的天文表——《乌鲁格别克表》四卷（Ulûgh Beg's Table），其中的第一卷论中国历法纪闰之义，其资料很可能就是那位中国学者所提供。

根据上述事实，可以看到，中国的天文历法于明代前期直接传入了中亚地区，伴随着的某些数学知识也必同时传入。

在明代的数学著作中出现了“写算”，是一种笔算乘除法，起于吴敬的《九章算法比类大全》，给出 4 例（见下页图 6.4.1）。在“写算”下有注称：“先要画置格眼，将实写于上横，写法数于右直，写法实相呼填写格内，得数从下小数起，遇十进上，合问。”与图 6.4.1 相结合，一看便知。其下还有 4 句诗歌：

写算须先仔细看，物钱多少在毫端，

就填图内依书数，加减乘除总不难。

在 4 例乘法之后，接着“除法”4 例，未说是否为“写算”，实际上是笔算除法，其形式如下页图 6.4.2。后来程大位再次讲述“写算”，并明确提到“写除”一词。可见“写算”包括除法。吴

---

① 本资料出自阿迪丽·雅库波夫用哈萨克文所写的第三版《乌鲁格别克宝库》一书. 该书由新疆大学中文系教师阿尔斯兰·阿不都拉译成维吾尔文，于 1985 年由新疆人民出版社出版. 又由译者从第 42～43 页译成汉文. 由新疆大学数学系阿米尔教授提供. 谨向他们表示谢意.

敬诗歌的末句“加减乘除总不难”，就是说用笔算能顺利进行加减乘除运算。


今有田米一萬三千五百六十七石九斗五升每石價鈔一十二貫五百文問該鈔幾何

答曰一十六萬九千五百九十九貫三百七十五文

法曰置米

图 6.4.1　吴敬“写算”书影(乘法)


今有鈔一十六萬九千五百九十九貫三百七十五文每米一石價鈔一十二貫五百文問該米幾何

答曰一萬三千五百六十七石九斗五升

法曰置鈔為實以每石價鈔

图 6.4.2　吴敬“写算”书影(除法)

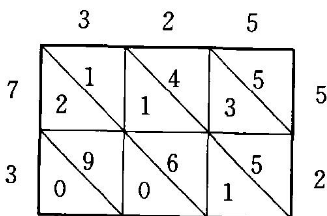


图 6.4.3　波什迦罗二世“格子算”

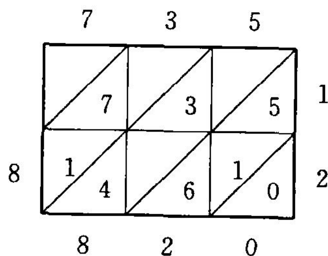


图 6.4.4　印度之“格子算”

这种写算是自己创造的，还是外来的？毫无疑问是后者。其中乘法十分简捷，很容易掌握。因此，从 12 世纪到 17 世纪风行

于印度、伊斯兰地区和欧洲。由于计算时要先画好方格，所以通常称它为“格子算”。如 12 世纪时印度的婆什迦罗二世（Bhaskara Ⅱ，1114～1178?）在著作中就有如图 6.4.3 那样的算式，[①②]，图 6.4.4 为印度之另一例子[③]。在阿尔·卡希的《算术之钥》中也多次出现格子算，图 6.4.5 是阿拉伯文写本原样[④]，其中的两个算式样子不同，实质上没有差别，那个菱形的便于上下相加，如下页图 6.4.6 是由图 6.4.5 中的一个算式改写的。在欧洲也是这样，十五六世纪出版的算术书中差不多都有格子算。如前面提到的《特雷维索算术》，不仅有，而且有略有变化的两种形式（如下页图 6.4.7）。其他例子不举了。

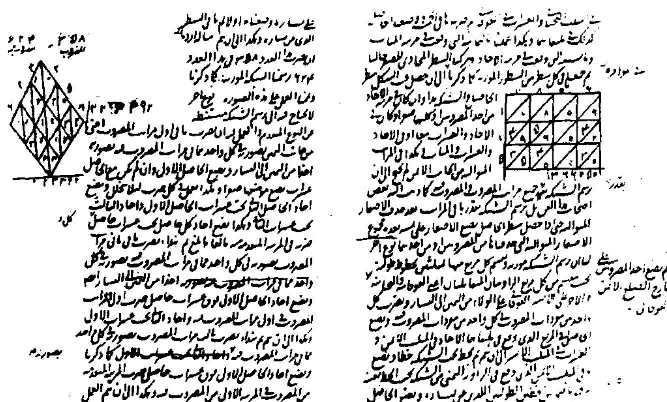


图 6.4.5　阿尔. 卡希《算术之钥》书影

---

① 这里所给出的是用现代数码改写的.

② В. Д. Чистяков, Материалы по Истории Математики в Китае и Индии. Уиплепгиз: 1960. стр 109.

③ F. Cajori. A History of Elementary Mathematics. The Second Edition, 1916. 98

④ 阿尔·卡希的《算术之钥》与《圆周论》一起由罗纯费力德（Б. А. Розенфельд）译成俄文并和阿拉伯文原文于 1956 在莫斯科出版.

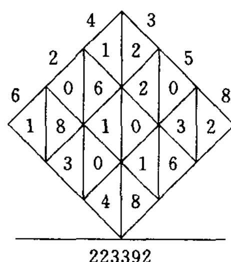


图 6.4.6（图 6.4.5　中菱形式的改写）

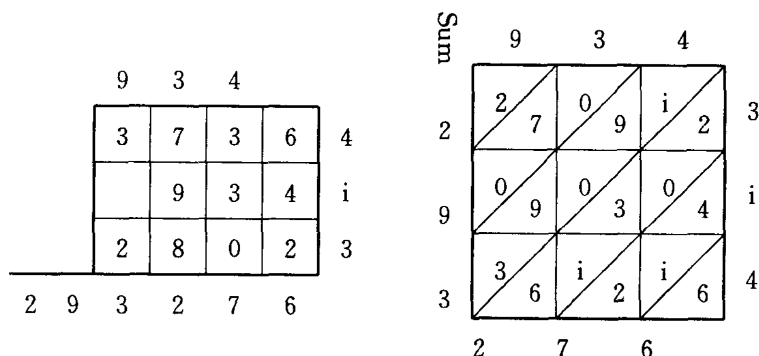


图 6.4.7　《特雷维索算术》中的格子算

格子算既然在世界上广泛流行，可以说到处都在使用，有很多机会传到中国来。当时中国和外界交往频繁，商业贸易、航海、宗教往来等活动过程都能起到传播作用。格子算极易掌握，稍有数学知识的人一看就懂，用头脑就能记住，而且不会出错。实际上很可能在元代就传进来了。

流行于印度、伊斯兰地区的“土盘算法”也传入了中国，早在唐代一行的译著中就已提到，元、明时期随着回回历法的传播，土盘算法为中国汉族历算家所知，在各种著作中不断记载。如《大明会典》：“洪武三十一年革回回监，……回回官生附隶本监，

子弟仍世其业，以本国土板历相兼推算”[①]，黄省曾也说：“国初司天监外设回回司天监，取回回人世官之，用本国土板历，并兼推算”[②]，等等。李俨曾参考B. Datta and A. N. Singh 的《印度数学史》(History of Hindu Mathematics) 中“Pats”条对土盘算法计算有详细介绍[③]。

土盘算法是笔算，即在地面或盘上撒细灰或沙，计算者用竹签或细铁棍等在其上写数码进行计算。前述之“写算”当然可以在土盘上实行，应为土盘算法之一种。

总之，在明代中国和伊斯兰地区的数学交流不仅是存在的，而且较多。

第三节　中国和日本、朝鲜、越南的数学交流

在明代，中国和日本、朝鲜、越南的数学交流也很频繁，宋、元时期的某些历算著作是明代传入这些国家的，明代刚出版的著作，如《算法统宗》等都很快传入日本等国。

为了完整起见，本节从元代讲起。

中朝数学交流

中朝两国山水相连，数学交流自然较多。早在忽必烈登汗位之初就开始向朝鲜赠送历书，从1263年起到《授时历》施行前的1279年17年间有14次之多[④]，差不多每年一次。那时所用历法为金之《知微历》。当1281年颁行《授时历》之后不久，朝鲜便注意到该历的价值，于是于1303～1304年派崔诚之到中国来“求师

---

① 《万有文库》二集本《明会典》卷206.

② [明] 黄省曾. 西洋朝贡典录（卷下）“阿丹国”条.

③ 李俨. 伊斯兰教和中国历算的关系.《中算史论丛》第五集. 北京：科学出版社，1955. 57～75

④ 《元史》卷4～卷10“世祖本纪一”至“世祖本纪七”.

而授业，具得其不传之妙”。他回国以后想找一个合适的人传授，“久之难得其人”，后来找到姜保，“一学而尽通其法，捷而神明，精通之闻，传播人口”，因而受到朝鲜王的褒奖。姜保的研究著作是《授时历捷法立成》，先有写本，并于1343年刊行。书末附有“乘除法歌诀”①，中国现传《授时历》中没有。歌诀中包括“留头乘法”、“飞归除法”、“因法”、“加法”、“半法”和“飞归除法歌”6个小项目，查其中的用语，“留头乘法”首先见于朱世杰的《算学启蒙》，而“飞归除法歌”除多加几句之外，与《算学启蒙》中“九归除法”歌几乎完全一样。为了研习方便起见，将“飞归除法歌”列下，比《算学启蒙》多的句子在下面画横线，有区别的字下加一点。

飞归除法歌

一归　如一归　逢一进成十
　　　<u>见一无除作九一</u>
二归　二一添作五　逢二进成十
　　　<u>见二无除作九二</u>
三归　三一三十一　三二六十二
　　　逢三进成十　<u>见三无除作九三</u>
四归　四一二十二　四二添作五
　　　四三七十二　逢四进成十
　　　<u>见四无除作九四</u>
五归　见者加倍　逢五进成十
　　　<u>见五无除作九五</u>
六归　六一下加四　六三三十二
　　　六三添作五　六四六十四
　　　六五八十二　逢六进成十

① 李俨．十三、十四世纪中国民间数学．北京：科学出版社，1957．47～48

见六无除作九六

七归　七一下加三　七二下加六

七三四十二　七四五十五

七五七十一　七六八十四

逢七进成十　见七无除作九七

八归　八一下加二　八二下加四

八三下加六　八四添作五

八五六十二　八六七十四

八七八十六　逢八进成十

见八无除作九八

九归　随身下　逢九进成十

其中“五归　　见者加倍”，朱世杰的歌词是“五归添一倍”5个字连成一句，“见×无除作九×”是指在计算中遇到被除数和除数的首位相同，而又不能除得一的处理方法。实际上，朱世杰已提到此点，只不过他用“但遇无除还头位”一句带过，没有编成歌诀加在每归之后。

上述情况说明，《算学启蒙》在元代已传入朝鲜。《授时历捷法立成》所附之“乘除法歌诀”非《授时历》原有，而是姜保根据其他数学书编写而附上的。

朝鲜于1392年进入李朝时期，一直持续到1910年亡，与中国的明、清时期并存，行中国年号。其中世宗李裪[1] 在位（1418～1449）期间，朝鲜特别注意科学发展，李裪亲自批准或提议的研究和出版等项目就有多项。据朝鲜史书所载，下列的资料十分重要：

“世宗，概念历法之未明，博求历算之书，幸得《大明历》、《回回历》、《授时历通轨》及《（算学）启蒙》、《杨辉全集》、《捷

① “裪”音桃（tao）.

用九章》等书。然书云观习算局，算学重监等，无一人知之者，于是别置算法校正所，命文臣三四人及算学人等，先习算法，然后推求历法，数年之内，算书与历理，皆能通晓。然犹虑未传后世，又设历算所，训导三人，学官十人，算书历经，常时习熟，每日置薄，每旬取才，考其勤慢，劝惩铼业，故知算法者，相继而出。”①

世宗不仅有全盘发展数学和历法的计划，而且切实实施。与中朝数学交流有如下二项：

第一项是出版数学著作，主要有 3 书：

1.《杨辉算法》，在中国原有“古杭勤德书堂”刊本，可能是在明初。此书传到朝鲜，而在国内失传。朝鲜观察使辛引孙“敬奉内旨，嘱（庆州）府尹臣金乙辛、判官李好信，命工锓梓”，不到一个月便于宣德八年(1433 年)5 月刻完，是为“庆州府版”(图 6.4.8)。这次共印 100 部：“应尚道监司，进新刊《杨辉算法》一百件，分赐集贤殿、户曹、书云观习算局。”②，这个刊本现在还能找到，是用活字印刷的，相当珍贵。



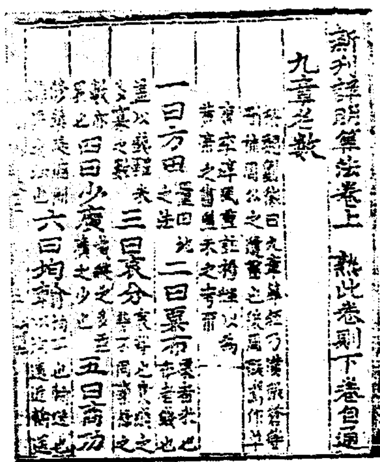
图 6.4.8《杨辉算法》庆州府版封面书影

① 《世宗实录》六年六月辛酉条．转引自金容云，金容局．韩国数学史．180(注)．

② 《世宗实录》十五年八月乙巳条．转引自金容云，金容局．韩国数学史．190

2.《算学启蒙》，如前所述，可能于元代即已传入朝鲜。世宗十二年（1430年）李裪曾请副提学郑麟趾进讲《算学启蒙》[①]，并将其用活字印刷出版。17世纪的金始振说“岁丁酉（1657年）居忧抱病，无外事，适得抄本《杨辉算书》。于今金沟县令郑君漭又得国初印本《算学启蒙》于地部会士庆善征。……其后又偶得一抄本……”。他经过校对，于顺治十七年（1660年）重刊出版[②]。其中“国初印本《算学启蒙》”就是李朝世宗时印刷的，金始振仍然生活在李朝，所以“国初”即李朝初期。这次重刊《算学启蒙》的形式应与世宗时的印本相近。

3.《详明算法》，有明初洪武癸丑年（1373年）庐陵李氏明经堂刊本，朝鲜世宗时活字版重印[③]（图6.4.9）。该书在朝鲜影响很大，在后来的著作中大量引用。例如崔锡鼎（1645～1715）在所著《九数略》中就把《详明算法》列为重要参考书。


新刊詳明算法卷上　熟此卷則下卷自通

九章之數

一曰方田　二曰粟布　三曰衰分　四曰少廣　五曰商功　六曰均輸

图6.4.9　朝鲜世宗时复刻本《详明算法》书影

《九数略》中也引用了《杨辉算法》和《算学启蒙》。由于这部书出版的年代相当于中国的清朝初期，所以其中有《算法统宗》及“写算”，还有

① 金容云，金容局. 韩国数学史. 槙书店，1978. 156.

② ［朝鲜］金始振. 重刊算学启蒙序.

③ 児玉明人：十五世纪朝鲜刊铜活字版数学书. 无有奇奄双私刊. 1966. 18

“珠算”一节[①]。由此可推知，《算法统宗》于清初之前传入朝鲜。

世宗时把《杨辉算法》、《算学启蒙》、《详明算法》以及《五曹算经》和《地算》做为学生用的教科书。

第二项是组织人研究《授时历》。世宗五年（1423年），李裪召集学者研讨《宣明历》和《授时历》的差别，改正历法中的错误。于是于1432年由郑招、郑麟趾、郑钦之编纂《七政算内篇》；李纯之、金淡受命编纂《七政算外篇》，到1442年都完成了，一般合起来简称《七政算》，而且往往误记为郭守敬撰。

中朝数学交流情况大体上是清楚的，不过还有细节无法进一步介绍。

中日数学交流

中日之间的数学交流有悠久历史，隋唐时形成交流的高峰时期[②]，日本长期使用中国历法，直到1684年才改用日本保井春海所作之《贞享历》[③]，从此结束使用中国历法的历史。直到1683年，日本虽仅采用《大统历》不到一年，但是可以肯定地说该历在明末以前传到了日本。洪武四年（1371年），日本派僧祖来中国进表笺、贡马及方物，遣送回被虏中国人口，当他们回国时明政府“赐《大统历》及文绮罗纱。”[④] 建文四年（1402年），日本遣肥富、祖阿入明，第二年回国时，明朝又赠送《大统历》[⑤]。说明《大统历》在明初刚一颁布就传到了日本。

---

① ［朝鲜］崔锡鼎.《九数略》引用书籍及附录.

② 李迪.《中国数学通史》上古到五代卷. 南京：江苏教育出版社，1997. 342～347

③ 山本一清. 日本天文学史. 载于《图说天文讲座》第八卷. 厚生阁·恒星社，1937. 13

④《明太祖实录》卷16.

⑤ 李俨. 中算输入日本的经过.《中算史论丛》第五集. 北京：科学出版社，168～186

《授时历》可能在元代即传入日本。保井春海在制订《贞享历》之前于1675年曾主张由《授时历》代替9世纪中国唐代的《宣明历》，未果。

《大统历》是《授时历》改编本，其中有很多数学计算，数学也自然随之传到日本。17世纪日本大数学家关孝和（1642？～1708）对《授时历》进行过深入研究，著有《授时发明》（1680年）、《授时历经立成之法》（1681年）和《授时历经立成》，而在他的《括要算法》第一卷专讲"招差法"，其方法显然是受《授时历》影响，也是用平、立、定进行处理。后来在日本出版了不少以"招差术"命名的数学著作。

传入日本的数学著作有：

1.（宋）杨辉的《杨辉算法》；

2.（元）朱世杰的《算学启蒙》；

3.（元）安止斋、何平子的《详明算法》；

4.（明）夏源泽的《指明算法》；

5.（明）吴敬的《九章算法比类大全》；

6.（明）徐心鲁的《盘珠算法》；

7.（明）柯尚迁的《数学通轨》；

8.（明）程大位的《算法统宗》；

9.（明）佚名的《桐陵算法》。

这些传入日本的数学书的具体年份，虽然目前还说不清楚，但无疑都是在明末以前，有的如1、2两种可能要早到明初。朝鲜世宗时的3种活字印本在日本都有流传，日本对它们进行了研究。6、7、9在中国失传，6、7两种在中国连著录都没有，但是在日本却有收藏，说明它们出版后很快就传到了日本，时间不会晚于明亡。

《桐陵算法》在17世纪日本有记载，如村濑义益说："《桐陵

九章捷径算法》、《算学启蒙》、《直指统宗》为［异朝之书］。”[①] 从书名来看为明代著作无疑，著录的时间为 1673 年，距明亡仅 29 年，应在明亡前传入日本。需要指出的是：在日本藏有《铜陵算法》，而在国内也有发现，是明代还是清代著作？“铜”与“桐”不同，两者是否有关等问题都需探讨。

关于《算法统宗》传入日本的时间在明亡以前似可定论，但倒底是何年？是怎样传到日本的？有几种说法，都缺乏有说服力的证据[②]，因此具体情况还不明朗。本编第二章第四节对此已有详细讨论，此处不赘。

珠算于明代后期传入日本。日本称之为“十露盘”或“所六盘”。日文为ソロバン (soroban)，有 16 世纪末期的算盘保留至今[③]。

中越数学交流

越南是中国的近邻，两国有长期文化科技交流的历史。元明时期，交流有所加强。1265 年，蒙古汗忽必烈向越南赠送了当时行用的《知微历》，可能不是第一次。1281 年，中国颁行《授时历》，很快就传到了越南，并被越南采用，因此在越南开祐十一年 (1339 年) 才有改历名之举：“乙卯，(宪宗陈旺开祐) 十一年春，改《授时历》为《协纪历》。时候仪郎太史令邓辂，以前历皆名‘授时’，请改曰‘协纪’，帝从之。(邓) 辂常作玲珑仪，考验天象，罔不胗合。”[④]

由此可知《协纪历》来自《授时历》，而越南天文学家邓辂还

① 村濑义益. 算法勿惮改·序. 1673

② 大竹茂雄著，那日苏译.《算法统宗》之传人日本，《数学史研究文集》第四集. 内蒙古大学出版社、九章出版社，1993. 161～164

③ 李俨. 中算输入日本的经过.《中算史论丛》第五集. 北京：科学出版社，1955. 168～191

④ ［越南］吴士连. 大越史记本纪全书. 卷 5“陈纪三”.

作玲珑仪，并用以“考验天象”。这种仪器是郭守敬设计的，邓辂所造既然同名，说明两者必然有关，很可能是按郭守敬玲珑仪原理在越南重造的。

明改《授时历》为《大统历》，洪武二年（1369年），越南使者陈敏时等到达应天（今江苏南京市），回国时赐赠《大统历》[①]。以后又多次赐送。同一年，《大统历》也传入占城（今越南南部），当时的占城国王阿答阿遣使者到应天，回国时送给《大统历》。不久，向越南一次就送《大统历》3000册[②]。明嘉靖二十年（1541），嘉靖帝令广西布政司每年印1000册《大统历》给越南[③]。

14世纪末，越南的胡季犛曾下令在试场中增设书场，并在考试科目中增加数学[④]。15世纪初，即1429年，越南把官吏分为三个等级：文武全才、学识渊博、精通书算[⑤]。

从15世纪起，越南开始出现数学著作，至少有二种，第一种为武友（音译）所写的《大成算法》，讨论水稻种植面积的计算。第二种为梁世荣所写的《算法大成》，一册，其中包括九九歌诀、九归歌、归除法[⑥]等。把中国的计算方法介绍到了越南。明代有哪些数学书传到了越南，没有查到记载，也未见到有关于书的报道。十八、十九世纪时，越南数学家的著作显著增多，原李俨就收藏有8种，加上梁世荣的《算法大成》，共9种[⑦]。

---

① [明] 王世贞.《安南传》卷1；《明史》卷321“外国三”.

② 《明史》卷324“外国五”.

③ 《明会典》卷111“礼部六九·给赐二”.

④ [越南] 明峥著，范宏科，吕谷译. 越南史略（初稿）. 三联书店，1960. 129

⑤ 同③. 164

⑥ 韩琦. 中国历史上天文学与数学的交流. 中国科学史料. 12卷（2）1991. 3～8

⑦ 此项资料系严敦杰先生于60年代提供.

西夏金元明研究分类文献目录

（按各类的发表年代先后为序）

专　著

一、通论性著作

1. Mikami，Y. The Development of Mathematics in China and Japan，Leipzig，1913

2. Smith，D. E. History of Mathematics. Vol. Ⅰ-Ⅱ. Boston：Ginn & Co.，1923～1925（以后多次再版）.

3. 李俨. 中国算学史. 上海：商务印书馆，1937（后来多次再版，被译为日文）.

4. 严敦杰. 中学数学课程中的中算史材料. 北京：人民教育出版社，1957

5. 李俨. 中国数学大纲上卷（修订版）、下卷. 北京：科学出版社，1958

6. Needham，J.. Science and Civilisation in China. Vol. 3. Cambridge：Cambridge University Press，1959

7. Юшкевич，А. П.. История математики в средние века. Москва：физматгиз，1961

8. 李俨，杜石然. 中国古代数学简史（下册）. 北京：中华书局，1964（被译为英文）

9. 钱宝琮（主编）. 中国数学史. 北京：科学出版社，1964（后又再版，被译为日文）

10. Берёзкина，Э. И.. Математика древнего Китая. Москва：

Издателbетво《Наука》, 1980

11. 李迪. 中国数学史简编. 沈阳：辽宁人民出版社，1984（被译为日文）

12. 沈康身. 中算导论. 上海：上海教育出版社，1986

13. 中外数学简史编写组. 中国数学简史. 济南：山东教育出版社，1986

14. Martzloff, J. -C.. Histoire des mathematiques Chinoises. Paris: Masson, 1988

15. 刘钝. 大哉言数. 沈阳：辽宁教育出版社，1993、1995

16. 李兆华. 中国数学史. 台北：文津出版社，1995

二、专题性著作

1. 李俨. 中算家的内插法研究. 北京：科学出版社，1957

2. 李俨. 13、14世纪中国民间数学. 北京：科学出版社，1957

3. Pullen, J. M.. The History of the Abacus. NewYork、Washington: 1969

4. 华印椿. 中国珠算史稿. 北京：中国财政经济出版社，1987

5. 曲安京，纪志刚，王荣彬. 中国古代数理天文学探析. 西安：西北大学出版社，1994

三、与人物有关的著作

1. Hoe, J. Les Systèmes d'équations Polynômes dans le Siyuan yujian (1303). Paris: Mémoires de L'institut des Hautes Études Chinoises, 1977

2. 潘鼐，向英. 郭守敬. 上海：上海人民出版社，1980

3. 山田庆儿. 授时历の道. 东京都：みすず书房，1980

4. Chemla，K.. Edude du Livrs《Reflets des mesures du Cercle sur La mer》de Li Ye. L'universite de Paris ⅩⅢ，1982（博士论文）.

5. 白尚恕. 测圆海镜今译. 济南：山东教育出版社，1985

6. 李培业（校释）. 算法纂要校释. 合肥：安徽教育出版社，1986

7. 戴念祖. 朱载堉——明代的科学家和艺术巨星. 北京：人民出版社，1986

8. 孔国平. 李冶传. 石家庄：河北教育出版社，1988

9. 梅荣照，李兆华. 算法统宗校释. 合肥：安徽教育出版社，1990

10. 周瀚光，孔国平. 刘徽评传. 南京：南京大学出版社，1994（其中包括"李冶评传"和"朱世杰评传"）

11. 孔国平. 测圆海镜导读. 武汉：湖北教育出版社，1996

四、期刊及文集

1. 自然科学史研究，中国科学院自然科学史研究所，中国科学技术史学会.

2. 中国科技史料，中国科学技术史学会.

3. 数学史研究，日本数学史学会.

4. 珠算史研究，（日本）珠算史研究学会.

5. Historia Mathematica，International Commission the History of Mathematics.

6. 科学史集刊（已停），北京：科学出版社.

7. 吴文俊（主编）. 中国数学史论文集（一）～（四）（已停）. 济南：山东教育出版社，1985～1996

8. 李迪（主编）. 数学史研究文集第一辑～第六辑. 呼和浩特：内蒙古大学出版社、九章出版社，1990～1995

9. 李俨. 中算史论丛第一集～第五集. 北京：科学出版社，1954～1955

10. 中国科学院自然科学史研究所. 钱宝琮科学史论文选集. 北京：科学出版社，1983

11. 钱宝琮等. 宋元数学史论文集. 北京：科学出版社，1966

12. 梅荣照（主编）. 明清数学史论文集. 南京：江苏教育出版社，1990

论 文

一、通论性论文

1. 宋金元

钱宝琮. 金元之际数学之传授. 浙江大学师范学院院刊第一集二刊（1940），1～9

严敦杰. 宋元算书与信用货币史料. 益世报 1943 年 7 月 29 日“文史副刊”38 期.

藤原松三郎. 宋元明数学の史料. 帝国学士院纪事，昭和 19 年（1944）第三期；珠算史研究第 4 号（1982）.

严敦杰. 宋元算学丛考. 科学，1947，29（4）：109～114

严敦杰. 中算家的招差术. 数学通报，1955（1）：4～13

中国自然科学史研究室数学史组. 宋元数学综述. 宋元数学史论文集. 1～9

梅荣照. 唐中期到元末的实用算术. 宋元数学史论文集. 10～35

严敦杰. 宋金元历法中的数学知识. 宋元数学史论文集. 210～224

钱宝琮. 宋元时期数学与道学的关系. 宋元数学史论文集. 225～240

蔡振理. 中国数学史上的黄金时代及其四个伟大数学家. 台北：

Mathemedia，1978，3（2）
户谷清一著，周大欢译. 宋元时代计算方式的演变. 中华珠算，1981（2）：26～28
周瀚光. 宋明道学对古代数学发展的作用和影响. 论宋明理学. 杭州：浙江人民出版社，1983
梅荣照. 宋元数学的盛衰. 自然科学史研究，1988，7（3）：205～213
梅荣照. 宋元数学中新的思想、方法和理论. 自然科学史研究，1990，9（1）：28～37
孔国平. 再论宋元时期的天元术. 自然科学史研究，1991，10（2）：101～110
李迪. 宋元时期数学形式的转变. 中国科学技术史论文集（一）（李迪著）. 呼和浩特：内蒙古教育出版社，1991. 219～233
孔国平. 宋元时期的哲学与数学. 中国科学技术史国际学术讨论会论文集. 北京：中国科学技术出版社，1992. 46～51
王宪昌. 宋元数学与珠算的比较评价. 自然科学史研究，1997，16（1）：21～27
佟健华. 宋元数学人才群体之探索. 自然科学史研究，1997，16（3）：197～206

2. 西夏与元

2. 1. 西夏

谢贤熙，吕科. 西夏数学成就述评. 第二届中国少数民族科技史国际会议论文集. 北京：社会科学文献出版社，1996. 109～114

2. 2. 耶律楚材

陈垣. 耶律楚材之生卒年. 燕京学报，1930（8）：1469～1472
刘济华. 耶律楚材年谱草稿. 东吴学报，1937，复刊4（2）：140～160
方豪. 耶律楚材逝世七百年纪念. 东方杂志，1943，39（1）：93

~96
缪钺. 耶律楚材父子与元遗山. 益世报，1943 年 6 月 3 日"文史副刊"第 34 期.
严敦杰. 耶律楚材之历算学. 益世报，1943 年 6 月 17 日"文史副刊"第 35 期.

2. 3. 其他

劳汉生. 元裕之（元好问）非元裕再辨. 文献，1988（1）.
韩海山. 浅谈成吉思汗的运筹思想（摘要）. 中国少数民族科技史研究第三辑，呼和浩特：内蒙古人民出版社，1988. 48~51
劳汉生. 元代数学教育史研究报告. 内蒙古师大学报（自然科学版），1990（2）：36~45

3. 中外交流

3. 1. 一般

田坂兴道. 东渐せろイスラム文化の一側面じ就いこ（上）. 史学杂志，1942，53（4）.
杜石然. 试论宋元时期中国和伊斯兰国家数学交流. 宋元数学史论文集，241~265
杜石然. 再论中国和阿拉伯国家间的数学交流. 香港大学中文系集刊第一卷第二期"中国科技史专号"，1987. 213~218
李迪. 纳速拉丁与中国. 中国科技史料，1990，11（4）：6~11

3. 2.《几何原本》

严敦杰. 欧几里得几何原本元代传入中国说. 东方杂志，1943，39（13）:35~36
今井湊. 兀忽列的は"ユークリテズか". 数学史研究第 6 号，1960
李迪. 谁是我国第一个研究《几何原本》的. 呼和浩特：内蒙古教育，1964（5）：54~55（蒙文）

3. 3. 阿拉伯幻方

李俨. 阿拉伯输入的纵横图. 文物参考资料，1958（7）：18~20

夏鼐. 元安西王府址和阿拉伯数码幻方. 考古，1960（5），考古学和科技史. 北京：科学出版社，1979. 63～68

安. 阿拉伯数字的幻方. 科学大众，1966（5）：39

二、李冶及天元术

1. 李冶

1. 1. 李冶传记及成就

van Hée，L.. Li Ye，Mathématicien Chinois du XⅢ siecle. T'oung Pao，1913（14）：537～568

陈叔陶. 李冶李治辨. 史学集刊，1937（3）：155～164

缪钺. 李冶李治释疑. 东方杂志，1943，39（16）：41～42

程廷熙. 李治李冶. 数学通报，1953（6）：48

许莼舫. 李冶在数学上的伟大成就. 数学通报，1956（10）：9～13

梅荣照. 李冶及其数学著作. 宋元数学史论文集. 104～148

（河北大学）数学系理论学习组. 元代进步数学家——李冶. 河北大学学报（自然科学版），1976（1）：113～117

吴裕宾，陈兴华. 我国中世纪杰出数学家——李冶. 数学的实践与认识，1976（4）：6～11

李迪. 十三世纪我国数学家李冶. 数学通报，1979（3）：26～28

孔国平. 金元之际著名数学家——李冶. 自然辩证法通讯，1986（5）：57～68

周瀚光. 论李冶的科学思想. 中国数学史论文集（三）. 济南：山东教育出版社会. 1987，73～80

方镇华. 对李冶数学成就的新认识. 数学史研究文集第五辑. 1993. 112～114

林力娜著，郭世荣译. 李冶在数学史上的地位. 数学史研究文集第五辑. 1993. 165～169

孔国平. 李冶——栾城的骄傲. 数学史研究文集第五辑. 1993. 170～172
李迪. 李冶的小数记法. 数学史研究文集第五辑. 1993. 173～176

1. 2. 著作介绍

(河北大学) 数学系理论学习组. 关于李冶的数学著作简介. 河北大学学报 (自然科学版), 1976, (2).
白尚恕. 李冶的数学著作. 数学史研究文集第五辑. 1993. 105～111

1. 3. 研究活动

郭书春. 评《李冶传》. 自然辩证法研究, 1989, 5 (4): 75～76
李迪. 近 20 年来国内外对李冶的研究介绍. 数学史研究文集第五辑. 1993. 148～151
白尚恕. 金元数学家李冶诞辰 800 周年纪念. 数学史研究文集第五辑. 1993. 159～162

1. 4. 天元术

何洛. 中国古代天元术的发生与发展. 数学通报, 1964 (11): 45～48

2. 《测圆海镜》研究

崔朝庆. 海镜新题. 数学杂志 (第二册). 1912. 50～51
李俨. 测圆海镜批校. 国立北京图书馆馆刊, 1934, 8 (2): 49～60; 中算史论丛第四集. 北京: 科学出版社, 1954. 24～31 (按: 此批校工作为清代孔广森所做, 系李俨转载).
李俨. 测圆海镜研究历程考. 学艺, 1931, 11 (2): 1～26、11 (6): 1～15、11 (8): 1～36、11 (9): 1～10、11 (10): 1～14、1932, 12 (1); 117～134、12 (2): 85～101、12 (3): 99～111、12 (4): 83～92、《中算史论丛》第四集. 北京: 科学出版社, 1955. 32～237
钱宝琮. 有关《测圆海镜》的几个问题. 宋元数学史论文集. 270

～278

魏保华.《测圆海镜》与借根方比例. 数学史研究文集第五辑. 1993. 115～122

林力娜著，郭世荣译. 李冶《测圆海镜》的结构及其对数学认识的表述. 数学史研究文集第五辑. 1993. 123～142

孔国平.《测圆海镜》是一个构造体系. 数学史研究文集第五辑. 1993. 143～147

沈康身.《测圆海镜》“洞渊九容”中的“四容”. 数学史研究文集第五辑. 1993. 163～165

孔国平.《测圆海镜》的构造性. 自然科学史研究，1994，13（1）：10～19

莫绍揆. 对李冶《测圆海镜》的新认识. 自然科学史研究，1995. 14（1）：22～36

3.《益古演段》研究

刘水弦. 中国代数名著“益古演段”评介. 东方杂志，1943，39（16）:33～36

程廷熙. 益古演段中的密率. 数学通报，1953（10）：23

Lam lay-Yong & Ang Tian-Se. LiYe and his I Ku yen tuan. Archive for History of Exact Sciences，1984，29(3)：237～266 有刘祖慰中译文，载《科学史译丛》1983年3期和4期.

孔国平. 对李冶《益古演段》的研究. 中国数学史论文集（三）. 1987. 58～72

刘操南. 中国代数名著《益古演段》评介. 古今谈总，1988（9）. 古籍与科学，收入《北方论丛》丛书内，1990. 329～339

三、《授时历》及其作者

1.《授时历》及郭守敬、王恂

1. 1.《授时历》综合研究

钱宝琮. 授时历略论. 天文学报，1956，4（2）：193～209；钱宝琮科学史论文选集. 1983. 352～376

刘操南. 授时历术述要. 宁波师院学报（黄宗羲研究专辑），1985. 古籍与科学，304～328

景冰.《授时历》的研究. 郭守敬及其师友研究论文集（邢台市郭守敬纪念馆编）. 1996. 76～93

1. 2.《授时历》数学研究

Gauchet，L.. Note Sur La Trigonometrie Sphérigue de Kouo Cheou-King. T'oung-Pao，Vol. XⅧ，1917. 151～174

许莼舫. 郭守敬的三角术发明和其他发明. 科学大众，1954（4）：182～185

李俨. 郭守敬球面割圆术. 测绘通报，1956，2（1）：5～10

刘钝. 郭守敬的《授时历》和天球投影二视图. 自然科学史研究，1982，1（4）：327～332

杉本敏夫. 对授时历的若干表格的订正. 明治学院论丛第415期，1987，1～9（日文）

杉本敏夫. 关于用于授时历的沈括的逆正弦公式的精度. 明治学院论丛第419期，1987，1～12（日文）

藤井康生. 授时歷の计算につへて. 数学史研究，通卷139号. 1993. 12～29

李俨. 郭守敬《授时历》平立定三差法. 郭守敬及其师友研究论文集（邢台市郭守敬纪念馆编）. 1996. 94～107. 此文摘自《中算家的内插法研究》一书.

1. 3.《授时历》与日本

玄赖秀雄. 授时歷と大津神社会歷算额. 数学史研究，通卷82号，1979

2. 郭守敬

2. 1. 郭守敬传记

李迪．我国古代大科学郭守敬．科学画报，1957（1）：28～29

小星．古代伟大的科学家郭守敬．河北日报，1961年2月25日，3版．

怀冶．郭守敬造《授时历》．文汇报，1961年6月11日，2版．

淮林．元代杰出的自然科学家郭守敬．光明日报，1961年11月8日，4版．

张跃铭．论郭守敬的历史地位．辽宁师院学报（哲学社会科学版），1979（2）：21～29

2．2．郭守敬的思想方法

厦门大学自然观上儒法斗争研究组第五小组．郭守敬的科学贡献和唯物主义自然观．厦门大学学报（自然科学版），1975（1）：32～35

子罗，考尚．郭守敬成功之路初探．郭守敬及其师友研究论文集（邢台市郭守敬纪念馆编）．1996．228～241

潘鼐．探索郭守敬的科学思想与方法．郭守敬及其师友研究论文集（邢台市郭守敬纪念馆编）．1996．242～254

陈瑞平．郭守敬在科技上的进取精神．郭守敬及其师友研究论文集（邢台市郭守敬纪念馆编）．1996．255～258

3．王恂

白尚恕，李迪．十三世纪中国数学家王恂．中国数学史论文集（一）．济南：山东教育出版社，1985．37～51；香港大学中文系集刊1987，1（2）：中国科技史专号．233～248

四、朱世杰

1．综合研究

杜石然．朱世杰研究．宋元数学史论文集．1966．166～209

2．《算学启蒙》

严敦杰．算学启蒙传考．东方杂志，1945，41（9）：31～32

Lam Lay-Yong. Chu Shih-chieh's Suan-hsüeh chi-meng, Archive for History of Exact Sciences，1979，21（1）：1～31

户谷清一. 算学啓蒙に记载て水ている九歸歌（一歸）に關して. 珠算史研究第5号，1982 中译文载《齐鲁珠坛》，1984（2）：36～41

王渝生.《算学启蒙》流传朝鲜考. 第二届中国少数民族科技史国际会议论文集. 北京：社会科学文献出版社，1996. 115～117

3.《四元玉鉴》

3. 1.《四元玉鉴》

Hoe，J.. Zhu Shijie and his Joda Mirror of the Four Unknowns. Proceedings of the First Australian Conference on History of Mathematics. Monash University，1981. 103～134

胡明杰. 四元玉鉴的一般性程度. 自然科学史研究，1991，10（1）：8～16

3. 2. 四元术

郑之蕃. 四元开方释要. 清华学报，1924，1（2）：233～278

何洛. 四元术今释. 数学通讯. 60期，1956（4）：5～8；62期，1956（6）：9～15

杜石然. 朱世杰的“四元消法”和“垛积招差”. 科学史集刊，1962（4）：66～80

李兆华. 朱世杰的“四元术”. 中等数学，1984（5）：43～45

胡明杰. “互隐通分相消”研究. 北京师范大学学报（自然科学版），1989年增刊1：36～39

胡明杰. 四元术的数学基础. 北京师范大学学报（自然科学版），1991（4）：492～498

徐泽林. 四元术与点窜术. 通向现代科学之路的探索. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，1993. 61～70

王青翔，毛东明. 四元术より见たる中国の宇宙生成论（上），通

卷142号. 1994. 11～18；（下）通卷143号. 1994，9～17

4. 朱世杰的垛积招差与方程

4. 1. 垛积招差

钱宝琮. 朱世杰垛积广义. 学艺，1923，4（7）：1～9
汤天栋. 茭草形段罗草补注. 科学，1926，11（11）：1535～1558
方淑姝. 朱世杰垛积术广义. 数学杂志，1939，2（1）：94～101
李兆华. 朱世杰的垛积术与四次内插法. 中等数学，1984（2）：47～48
傅庭芳. 朱世杰与李善兰在垛积上的成就. 中国数学史论文集（二）. 济南：山东教育出版社，1986. 84～98

4. 2. 方程

王艳玉. 朱世杰的"多次立天元法". 数学史研究文集第一辑. 1990. 83～93

五、元明数学（不包括程大位）

1. 元代中后期数学

1. 1. 赵友钦

徐义保. 赵友钦生活年代与籍贯考. 通向现代科学之路的探索. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，1993. 54～60
Shinji Arai. Astronomical Studies by Zhao Youqin. Taiwanese Journal for Philosophy and History of Science，1996，5（1）：59～102
Fu Daiwie. Crossing Taxonomies and Boundaries：A Critical Note on Comparative History of Science and Zhao Youqin's Optics. Taiwanese Journal for Philosophy and History of Science，1996，5（1）：103～128
Volkov，A.. The Mathematical Work of Zhao Youqin：Remote Surveying and the Computation of π. Taiwanese Journal for

Philosophy and History of Science，1996，5（1）：129～189
Volkov，A.. Zhao Youqin and his Calculation of π，Historia Mathematica，1997，24（3）：301～331
新井晋司. 赵友钦の生涯，中国技术史の研究（田中淡主编）.（日本）京都大学人文科学研究所，1998. 823～862
孔国平. 赵友钦及其《革象新书》的数学成就. 中国科技史料，1998，19（2）：40～45

1. 2.《河防通议》

纪志刚. 赡思与《河防通议》. 中国少数民族科技史研究第三辑. 呼和浩特：内蒙古人民出版社，1988. 21～31
郭涛. 数学在古代水利工程中的应用——《河防通议·算法》的注释与分析. 农业考古总第33期，1994（1）：271～278
郭书春.《河防通议·算法门》初探. 自然科学史研究，1997，16（3）：223～232

1. 3.《算法全能集》

户谷清一.《算法全能集》综述. 湖南珠算，1983，总27期，总28期，总29期.

1. 4.《详明算法》

李培业.《详明算法·乘除见总》诠释. 珠算研究，1983（2）：8～12

2. 明代数学

2. 1. 综合研究

李俨. 明代算学书志. 图书馆学季刊，1926，1（4）：667～682
李严. 增修明代算学书志. 图书馆季刊，1931，5（1）：2123～2138，《中算史论丛》第二集.
武田楠雄. 明代にすける算书形式の变迁，科学史研究第26号，1953. 13～19
武田楠雄. 中国の民众数学. 自然，1956. 57～62

郭金彬. 14 世纪后中国数学中断的原因. 自然辩证法通讯，1983，5（3）：52～55

孙宏安. 十四世纪中国数学中断的原因浅探. 辽宁师大学报（自然科学版），1986 年增刊“数学史专辑”：57～65

杜石然. 明代数学及其社会背景. 自然科学史研究，1989，8（1）：9～16

金福. 对明代数学思想的几点分析. 数学史研究文集第一辑. 1990. 94～103

冯立升. 明代回回族的天文历算成就. 中央民族学院学报，1991（2）：53～56

梅荣照. 明清数学概论. 明清数学史论文集. 南京：江苏教育出版社，1990. 1～20

2. 2.《通源算法》

严敦杰. 关于明初刊本的《通源算法》. 明清数学史论文集. 南京：江苏教育出版社，1990. 21～25

2. 3.“永乐大典算书”

李俨. 永乐大典算书. 图书馆季刊. 1928，2（2）：189～195；《中算史论丛》第二集. 北京：科学出版社，1954. 47～53

严敦杰. 重跋新发现之《永乐大典》算书. 自然科学史研究，1987，6（1）：1～19

2. 4.《算法大全》与《算学宝鉴》

劳汉生.《算法大全》与《古今算学宝鉴》初探. 文献，1987（3）：192～203

张正明，高春平. 晋商王文素及其《新集通证古今算学宝鉴》. 晋阳学刊，1994（1）：69～73

冯礼贵，张秀琴，王彩云. 明代山西数学家王文素研究. 科学技术与辩证法，1994，11（6）：33～36

2. 5.《盘珠算法》

靖玉树. 对《盘珠算法》的探讨. 琅琊珠算, 1984（4. 5）

2. 6.《一鸿算法》

王荣彬, 李迪. 新发现“一鸿算法”の珠算を探究する. 珠算史研究第26号, 1991, 3～16

李迪, 王荣彬. 新发现的史料《一鸿算法》简述. 数学史研究文集第二辑. 1991. 80～84

李迪, 王荣彬. 明代算书《一鸿算法》研究. 自然科学史研究, 1993. 12（2）: 112～119

2. 7. 朱载堉及其著作

刘复. 十二等律的发明者朱载堉. 庆祝蔡元培先生六十五岁论文集（上册）. 1993. 279～310

杨荫浏. 平均律算解. 燕京学报, 1937（21）: 2～60

Kuttner, F. A.. Prince Chu Tsai-Yu' s Life and Work, A Reevaluation of his Contribution to Equal Temperament Theory. Ethnomusicology, 1975, XIX（2）: 163～205

徐子蛮, 陆国强. 十二平均律与《嘉量算经》. 光明日报, 1979年4月4日, 3版

周葵.《算学新说》简介. 中华珠算, 1983（12）: 23～25; 珠算研究, 1984（1）

戴念祖. 明代大乐律家朱载堉的数学工作. 自然科学史研究, 1986, 5（2）: 113～119

2. 8.《算法指南》

户谷清一. 算法指南（1606）よ算盘は上て下5. 珠算史研究第8号, 1983

六、程大位及其著作

1. 程大位

1. 1. 程大位传记

严敦杰. 明清数学史中的两个论题——程大位和梅文鼎. 安徽历史学报，1957（1）：48～52
严敦杰. 明代珠算家程大位简介. 珠算试刊号，1979，31
高振儒. 一代珠算大师—程大位. 中华珠算总24期，1983（3）：16～20
李培业. 程大位的世系源流. 珠算研究，1984（2）：10～12. 日译文载《珠算史研究》第11号，1985
陈兰临. 试论程大位的珠算教育思想. 新珠潮总12期，1986（4）：13～16
李迪. 程大位的数学思想. 新珠潮总12期，1986（4）：6～12
宛吉善. 程大位署籍考. 新珠潮总12期，1986（4）：58～60
肖宗史. 从经商理财到数术名家. 新珠潮总12期，1986（4）：61～62
黄澎，郁祖权. 隶首薪传. 新珠潮总12期，1986（4）：63～66
严敦杰. 程大位及其数学著作. 明清数学史论文集. 1990. 26～52

1. 2. 程大位与《算法统宗》

傅溥. 明末我国大数学家程大位及其著作《算法统宗》. 科学教育，1976（4）.
余介石. 程大位及《算法统宗》. 珠算研究，1984（2）：9～10
宛吉善. 关于程大位及其《算法统宗》评价问题初探. 珠算总25期，1985（2）：10～13
李培业. 程大位和他的《算法统宗》. 黑龙江珠算，1985（2）
金萍，丁祖荣. 程大位及《算法统宗》新探. 西北大学学报（自然科学版），1995，25（1）：91～93
武田楠雄. 明代数学的特质Ⅰ、Ⅱ—算法统宗成立的过程. 科学史研究第28号，1954，1～12；第29号，1954，8～18；Ⅱ. 第34号，1955

2.《算法统宗》

2. 1.《算法统宗》的作用与影响

铃木久男. 算法统宗と尘劫记. 珠算史研究第14号，1986，3～12；中译文载新珠潮总12期，1986（4）：28～32；中国珠坛，1986（5）

李培业. 程大位《算法统宗》对我国数学发展所起的作用. 新珠潮总12期，1986（4）：1～5　日译文载《珠算史研究》第17号，1987，3～12

冯立升.《算法统宗》产生巨大影响的原因. 新珠潮总12期，1986（4）：21～25

徐日作. 程大位纂辑《算法统宗》的时代背景及其历史作用. 新珠潮总12期，1986（4）：26～27

仲田纪夫著，李迪译.《算法统宗》及其对日本数学教育起步的意义. 数学史研究文集第三辑. 1992. 24～35　原文载日本《埼玉大学记要·教育学部（教育科学)》第30卷. 1981. 55～66

大竹茂雄著，那日苏译.《算法统宗》之传入日本. 数学史研究文集第四辑. 1993. 161～164

2. 2. 对《算法统宗》形式与内容的综合研究

殷长生. 算法统宗与增删算法统宗. 珠算史研究第14号，1986. 13～18

刘亮. 采用诗词形式命算题是《算法统宗》的一大特色. 新珠潮总12期，1986（4）：17～20

李兆华.《算法统宗》试探. 自然科学史研究，1990，9（4）：308～317

郭世荣. 论《算法统宗》的资料来源. 数学史研究文集第四辑. 1993. 165～170

2. 3. 对《算法统宗》某项具体内容的研究

户谷清一著，王学敏译.《算法统宗》与珠算. 珠算研究，

1984（3.4）：29～34

张福汉.《算法统宗》中的珠算术. 中华珠算，1986（5）：1～5；新珠潮总12期，1986（4）：36～40

户谷清一著，王尚林译.《算法统宗》纵横图的探索. 新珠潮总12期，1986（4）：33～35

李培业. 程大位《算法统宗》中的“笔算”. 数学史研究文集第四辑. 1993. 171～176

郭世荣.《算法统宗·算经源流》及其学术价值. 中国科技史料，1996，17（2）：21～27

3.《算法纂要》及两书版本

3. 1.《算法纂要》

李俨.《算法纂要》的介绍. 安徽史学，1960（1）：58～61

李培业. 关于《算法纂要》的研究. 数学史研究文集第二辑. 1991. 85～90. 日译文载《珠算史研究》第18号. 1998. 3～24

3. 2.《算法统宗》与《算法纂要》版本

宛吉善.《算法统宗》的各种版本. 湖南珠算，1984（6）：8～9

李培业. 关于向达藏本《算法纂要》的版本. 珠算，1985（4）

李迪. 国内收藏的明刊本与抄本《算法统宗》与《算法纂要》. 中国数学史论文集（二）. 1986. 48～55

铃木久男. 算法统宗と算法纂要. 珠算史研究第16号. 1987，3～14

七、珠算史

1. 珠算史与珠算史研究

1. 1. 珠算发展史

Goodrich，L. C.. The Abacus in China. Isis，1948，N. 39

李俨，杜石然. 珠算史话. 文汇报，1961年8月8日，3版

问渠. 珠算史话. 安徽日报，1962年1月17日.

严敦杰. 珠算史话. 历史故事第四集. 1963. 29～33（中央人民广播电台广播稿）
黄继鲁著，户谷清一译. 中国珠算简史. 珠算史研究第6号，1983
华印椿. 中国珠算史年表. 珠算研究，1984（2）：26～28
迟荣瑜. 珠算历史初探. 中华珠算，1987（3）：6～10
汪德林. 珠算简史. 中国珠坛，1987（4）：22～24
迟荣瑜. 珠算历史三千年. 黑龙江珠算，1989（2）
李培业著，黄国屏译. 中华算盘の沿革. 珠算史研究第41号，1997，20～25

1. 2. 珠算史研究

张福汉. 关于珠算史研究的几点意见. 珠算研究，1983（1）：4～7

2. 珠算起源

2. 1. 珠算起源

吕炯. 中国珠算之起源. 东方杂志，1928，25（14）：81～88
袁在辰. 珠算之起源. 钱业月报（上海钱业公会刊物），1932，12（1）：1～7
严敦杰. 算盘探源. 东方杂志，1944，40（2）：33～36
华印椿. 中国算盘起源考. 珠算，1980（1）：14～19
殷长生. 中国算盘发明年代を论ず. 珠算史研究第2号，1981
山东代表团. 对珠算起源的考证. 珠算，1982（4）
铃木久男. 中国における算盘の起源. 珠算史研究第3号. 中译文载《黑龙江珠算》，1982（3）；珠算，1982（1）：17～21
姚克贤著，深沢英男译. 中国算盘の起源の问题について再检讨する. 珠算史研究第5号，1982
肖宗史. 再谈关于中国算盘的形成问题. 珠算研究，1982（4）：4～6
张福汉. 中国珠算盘渊源变革再探. 珠算研究，1984（2）：18～

22；又载《珠算》，1985（2）

2.2. 珠算发明

吴卯. 算盘发明小考. 北京晨报·艺圃，1935年8月24日.

陈光希. 我国自古以来的重大发明—珠算. 珠算，1981（2）：30～33

2.3. 珠算的起源与发展

Li Shu－T'ien. Origin and Development of the Chinese Abacus. J. Assoc. Comput. Math.. 1959（1）：102～110

陈光希. 珠算的产生与发展. 山西珠算，1980（18）：13～18；又载《珠算》，1981（2）

朱永茂. 关于珠算渊源与发展的探讨. 珠算，1982（4）：13～14；1983（1）：37～39

余介石. 我国算盘的发生与发展. 珠算研究，1983（1）：1～2

2.4. 珠算起源与其他问题的关系

Yamazaki，Y.. History of Instrumental Multiplication and Division in China from the reconing Blocks to the Abacus. Mem. Res. Dep. Toyo Bunko，1962（21）：125～148

周葵. 古代歌诀与珠算的渊源. 山西珠算，1981（19）：9～18

华印椿. 论珠算继承筹算，一脉相承. 珠算，1982（1）

李培业. 从算法发展史的角度来探讨算盘的起源. 珠算，1982（1）

朱永茂. 中国历代数学成就与珠算关系的论证. 民族珠算（创刊号）. 1983. 75～77

梅荣照著，王尚林译. 中国数学史の立场から珠算史の幾つかの问题について语る. 珠算史研究第13号，8～19

李培业. 关于我国筹算转变为珠算的时代问题. 数学史研究文集第二辑. 1991. 74～79

2.5. 关于珠算起源的讨论

朱永茂. 关于珠算起源学说的探讨. 中华珠算，1981（9）：16～

18；1982（1）：15～17
余介石（遗稿）. 算盘西来说的辨证. 珠算研究，1982（4）：1～3
华印椿. 中国算盘起源再考. 珠算研究，1982（2）；江苏测绘研究，1982（6）：18～21

3. 珠算史料

3. 1. 珠算史料

李俨. 珠算制度考. 燕京学报第10号，1931，2123～2138；又载《中算史论丛》第四集. 9～23
严敦杰. 珠算杂考. 新世界（重庆民生实业公司出版），1939，14（8）：8～10；14（9）：5～7
赵蔼士. 古珠算参考资料. 中华珠算，1981（3）
余介石. 中国筹算、珠算演变史料. 中华珠算，1981（7）
严敦杰. 珠算史の新しい史料について. 珠算史研究第5号，1982
李培业. 对"商归斗算珠"的不同理解. 珠算研究，1983（1）；中华珠算，1983（2）；日译文载《珠算史研究》第7号，1983
王才吉. 珠算史料集. 琅琊珠算，1983（5）：11～15
户谷清一. 中国明代の地方行政と珠算. 珠算史研究第7号，1983

3. 2. 西周陶丸

李培业. 对西周宫室遗址出土陶丸之考察. 珠算，1984（4）：21～22　日译文载《珠算史研究》第10号，1985，3～8
刘亮. 试说周原遗址出土的陶丸. 珠算，1984（4）：23～24　日译文载《珠算史研究》第10号，1985，9～15
户谷清一. 西周宫室遗址より出土した陶丸から算盘の起源を探索する. 珠算史研究第10号，1985，16～21；中译文载《珠算》，1985（5）
梅荣照谈话，王尚林译. 陶丸について私の见解. 珠算史研究第12号，1985，15～17

周全中．陶丸论．珠算史研究第 37 号，1995，37～44
张福汉，肖宗史著，大谷茂义译．“西周陶丸”は“两仪算”か“古珠算”の算珠である．珠算史研究第 41 号，1997，3～14

3．3．“清明上河图”

殷长生．围绕“清明上河图”的考察．中华珠算，1981（3）：1～3
余介石著，深沢英男沢．「清明上河图」を巡つて——中国算盘の变迁史．珠算史研究第 2 号，1981
殷长生．考察“清明上河图”鉴定中国算盘产生的年代．珠算，1981（3）：10～15
李新．铃木久男谈《清明上河图》，珠算，1981（3）：16～21
高永仁．“清明上河图”和珠算的起源．珠算，1981（3）：22～23
殷长生．从“清明上河图”看中国算盘．中国科技资料，1981（4）：62～66
华印椿．余介石教授对于《清明上河图》中有关算盘图形的探讨．中华珠算，1981（9）：13～15
李新．对北宋名画《清明上河图》上的算盘所联想．珠算，1982（1）
余介石，华印椿著，黄国屏识．清明上河图についての二つのノート．珠算史研究第 7 号．1983

3．4．《对相四言》

张志公．试谈《新编对相四言》的来龙去脉．文物，1977（11）：57～63
户谷清一著，徐振华译．关于对相四言——算盘的最古资料．山西珠算，1980（9）：1～4
铃木久男．「魁本对相四言杂字」について．珠算史研究第 2 号，1981
程贞一著，加藤政弘识．现存最古の中国そろばん図の年代推定．珠算史研究第 15 号，1986，3～14

4. 珠算算法

4. 1. 珠算算法综合研究

朱永茂. 我国珠算传统算法长短考. 中华珠算，1981（1）：1～2
铃木久男. 珠算算法在中国的由来. 中华珠算，1982（8）：8～19
朱永茂. 从古算法“颠乘”的演变看珠算法的发展. 中华珠算，1983（1）：23～24；1983（3）：13～15
李培业. 中国珠算算法史概论. 黑龙江珠算，1983（2）：10～12；珠算，1983（6）
朱永茂. 论珠算法计算体系的渊源和演化. 中华珠算，1987（4—5）：29～40；日译文载《珠算史研究》第20号，1989，3～25

4. 2. 归除类算法

黄际遇. 珠算归除之歌诀. 武高数理，1922（6）：50～51
李培业. 撞归法小史. 湖南珠算总19期，1981；中华珠算，1982（2）
李培业. 归除法历史初探. 珠算研究，1982（1）：6～19
周全中著，大谷茂义识并补注. 筹算除法は商除法ではない. 珠算史研究第38号，1996，5～9

4. 3. 珠算开方法

李慎行. 谈珠算开方的演变. 琅琊珠算，1983（5）：5～6
高建基，李秋岩. 珠算带纵开平方法. 新珠潮总12期，1986（4）：46～48

5. 珠算盘的构造

5. 1. 珠算盘的构造

梅荣照著，李幼麟识. 梁のある、串ざし算盘について. 珠算史研究第15号，1986，16～22
周葵. 有梁有档贯珠的算盘考. 中国珠算，1988（10）：21～24
姚文海. 中国算盘的档数的沿革. 上海珠技1989年9月20日；日译文载《珠算史研究》第23号，3～5
李培业著，黄国屏识. おが国の明代の梁上一つ珠の算盘につい

て. 珠算史研究第 24 号，1990，3～18

5. 2.《鲁班木经》中之算盘

姜克华.《鲁班木经》中的算盘格式. 中华珠算，1981（2）：24～25

靖玉树. 试谈《鲁班木经》中的“线”. 中华珠算，1983（12）：21～22

李培业. 关于《鲁班木经》中的算盘. 民族珠算创刊号，1983，73～74；齐鲁珠坛，1984（1）；日译文载《珠算史研究》第 9 号，27～31

周全中. 珠算盘发展经过以“线”为梁阶段的说法错了. 齐鲁珠坛，1984（1）：18～19；日译文载《珠算史研究》第 9 号，1984

姜克华. 算盘经过了以“线”为梁的阶段. 齐鲁珠坛，1984（1）：23～25；日译文载《珠算史研究》第 9 号，1984

姜克华. 再论算盘经过了以“线”为梁的阶段. 齐鲁珠坛，1984（4）：21～26

赵可正，金达桐. 对《鲁班木经》中“算盘式”几点看法考. 齐鲁珠坛，1984（4）：27～29

李培业著，黄国屏译.〈鲁班算盘〉の寸法を订正する. 珠算史研究第 11 号，1985，18

人名索引

A

阿达阿（公元14世纪），525
阿合马（公元13世纪），49
阿里不哥（?～1266），55
阿尼哥（?～1306），142
阿老瓦丁（公元13世纪），142
阿密尔顿（James Hamilton），4
阿尔・马蒙（al-Mamum，在位公元813～833年），139
阿尔・卡希（Ghiyāth al-Din Jamshid al－Kashi，公元15世纪），512，515
阿尔・花剌子模（al-Khowarizmi，公元10世纪），144
安止斋（公元14世纪），312，314，315，351，523
爱薛（Isa，1227～1308），137，142

B

白景亮（公元13世纪），205
白尚恕（1922～1995），102，103，130
巴阿拉（公元13世纪），137
巴塞洛缪（Bartholomuw，公元13世纪），136

班智达达钦体里（公元8世纪），2，3
班智达瓦贡布（公元11世纪），5
班固（32～92），61
比其赞巴希拉（公元8世纪），3
宝朝珍（公元16世纪），347，349
保井村海（公元17世纪），523
鲍浣之（公元12世纪），194
鲍廷博（1728～1814），97，100
博罗穆苏（公元13世纪），137
博尔吉（P. Borghi），510
婆什迦罗二世（Bhaskara Ⅱ，1114～1178?），514，515
布顿·仁钦珠巴（公元14世纪），6
J. 伯努力（Jacob Bernoulli，1654～1705），477

C

矶村吉德（公元17世纪），476，477
陈鼎臣（公元13世纪），154
陈致虚（公元14世纪），283，284
陈鹤龄，466
陈显道（公元13世纪），153
陈梦雷（公元18世纪），472
陈棠（公元19世纪），246，279
陈泰初（公元13世纪），153
陈维祺（公元19世纪），85，98
陈旺（公元15世纪），524
成吉思汗（1162～1127），17，41，131，135，152，512
程贞一（Joseph Cheng-Yi Chen），503

程颢（1032～1085），57
程大年（公元 18 世纪），466
程大位（1533～1606），37，39，211，219，221，262，326，327，328，332，334，335，336，337，344，346，351，352，353，354，376，388～393，395～400，402，404，406，408，411，412，413，415～418，420，422，423，432～435，438，439，447，449，450～455，462，469，470，471，479，480，482，486，488，492，506，508，509，513，523
程光绅（公元 18 世纪），391
程涓（公元 16 世纪），390
察达丹（公元 7 世纪），2
促布瓦（公元 15 世纪），6
柴村盛之（公元 17 世纪），476
村濑义益（公元 17 世纪），476，523
村井东渐（公元 18 世纪），477
曹振圭（公元 13 世纪），152，153
崔诚之（公元 14 世纪），321，517
崔锡鼎（1645～1715），521

D

大矢真一，473
达塔（B，Datta），517
达米达卡（公元 7 世纪），2
达·芬奇（L. da Vinci，1452～1519），345
邓辂（公元 14 世纪），524
邓元麟（公元 13 世纪），154
戴震（1724～1777），100

戴煦（1805～1860），246，279
党怀英（1134～1211），20
董化时（公元20世纪初），280
董文用（1224～1297），53，145
窦默（1196～1280），45，53，155
丁福保（1874～1952），348
丁好礼（公元14世纪），205
丁巨（公元14世纪），304，305，308，309，314
丁冠西（公元19世纪），101
丁取忠（公元19世纪），101
杜本（公元14世纪），205
杜瑾（公元15、16世纪），347
杜石然（1929～ ），280
杜文高（公元15世纪），349

F

法忽鲁丁（Fakhr-ud-din，毛夕里城的，公元13世纪），150
法忽鲁丁（Fakhr-ud-din，梯弗利斯城的，公元13世纪），150
范仲淹（989～1052），282
范铨（公元14世纪），282
范时春（公元16世纪），469
范一梁（公元17世纪），282，283
方镇华，130
冯天章（公元13世纪），153
冯承钧，151
丰臣秀吉（1537～1598），473，475
傅国柱（约公元17世纪），509

傅穆斋（待研究的公元 13 世纪的人名），151
傅立（公元 14 世纪），282
傅仁钧（公元 7 世纪），2
傅岩卿（公元 14 世纪），151

G

嘎玛巴·仁钦多吉（公元 14 世纪），6
高敬（公元 13 世纪），154
关孝和（1642? ～1708），193，473，474，476，479，523
郭荣（公元 12、13 世纪），45，46
郭德（公元 13 世纪），148
郭守敬（1231～1316），44～47，49，96，154～162，165，166，169，170，176，293，303，522，525
贵由（公元 13 世纪），131，136，137
顾应祥（1483～1565），97，99，100，480～483，485，507，510
龚显（公元 16 世纪），463

H

哈吉(al-Hajiaj Ibn Yusuf Ibn Mater，786? ～833)，139
何平子（公元 14 世纪），312，314，465，523
赫师慎（L. ven Hee），129
翟从政（公元 13 世纪），153
郝经（1223～1275），53
郝昇（公元 13 世纪），153
郝庆余（公元 13 世纪），153
郝智（公元 13 世纪），153

胡季犛（公元 14 世纪），525
胡沙虎（公元 13 世纪），50，51
胡宗宪（？～1565），482，483
忽必烈（1215～1294），44，45，47，48，49，53，54，55，131，137，139～142，147，153，154，155，161，166，194，517，524
华蘅芳（1833～1902），338
华印椿，388，348，349
洪天赐（Ang Tian-Se），130
黄龙吟（公元 17 世纪），334，353，465，495，496，508
黄省曾（公元 16 世纪），517
黄钟骏（公元 19 世纪），337
黄宗宪（公元 19 世纪），101
黄宗羲（1610～1695），169，183，186
黄帝（传说远古人物），207

J

加宾尼（John of Plano Carpini，公元 13 世纪），136
加玉桑（公元？世纪），3
甲迦冬衮（公元？世纪），2
贾步纬（1827～？），472
贾亨、贾通（公元 14 世纪），309，310，314，326，351，465
贾宪(公元 11 世纪)，36，39，43，232，233，277，327，336，437
姜保（公元 14 世纪），321，322，518
蒋守城，465，466
蒋周(约公元 12、13 世纪)，35，37，43，54，61，104，111，114，115，117，208

金城公主（公元8世纪），2
金来朋（公元15世纪），349，351
金乙辛（公元15世纪），520
金始振（公元17世纪），521
金淡（公元15世纪），522
金履祥（1231～1303），205
今村知商（公元17世纪），476
靳德进（公元13世纪），145，204
靳祥（公元14世纪），204
建部贤弘（1661～1716），476
焦友直（公元13世纪），145
吉田光由（1598～1672），473
角仓素庵（公元17世纪），473

K

康巴·查吴（公元？世纪），3
克贝尔（J. Köbel，1470～1533），510
柯尚迁（公元16、17世纪），399，493，507，523
可里马丁（公元13世纪），142
可马剌丁（公元13世纪），148，149
孔国平，102，130，280
孔广森（1752～1786），97，99，103
阔里吉思（约公元14世纪），204

L

拉鲁（M. LaLou，1890～1967），4

兰倍特（J. Lambert，1728～1777），285
蓝丽蓉（Lam Lay-Yong），130
朗措东亚（公元？世纪），3
朗措多勒（公元？世纪），2
林力娜（K. Chemla），129，130
雷渊（公元13世纪），23
隶首（传说远古人物），59
廉希宪（1231～1280），203
廉淳（公元13、14世纪），203
李遹（公元12、13世纪），50，51
李冶(1192～1279)，23，35，37，38，40～44，50～66，68，69，73，74，75，78，81，83，86～90，93，94，95，97，99，100，101，104，106，107，109，110，110，111，117，118，120，123～126，128，129，130，193，194，211，219，228，239，303，306，327，408，482
李昉（925～996），53
李俊民（公元13世纪），53
李献卿（公元13世纪），53
李焘（1115～1184），57
李谦（公元13世纪），170
李克修（公元13、14世纪），60，99
李庆余（公元13世纪），153
李迪（1927～ ），100，101，130，303，466
李潢（？～1811），97，100，103
李锐（1768～1817），97，101
李俨(1892～1963)，129，151，267，326，331，338，348，349，496，506，507，508，517，525
李裪（公元15世纪），519，521，522

李好信（公元15世纪），520
李纯之（公元15世纪），522
李元昊（1001～1049），7
李汾（公元？世纪），23
李文一（公元11、12世纪），35，40，43，208
李盛铎，331
李约瑟（Joseph Needham，1900～1995），332，389
李长茂（公元17世纪），337
李珏（公元14世纪），283
李德载（公元13世纪后期），35，42，43，208，239
李淳风（公元7世纪），207，215
李善兰（1811～1882），84，85，98，101，278
李兆华，467，471
里泽（A. Riese，1489？～1559），510
梁世荣（公元15世纪），525
柳贯（公元14世纪），205
刘基（1311～1375），282
刘仕隆（公元14、15世纪），328，329，447
刘秉忠（1216～1274），35，44，45，47，49，153
刘岳云（公元19世纪），98
刘汝谐（公元12世纪），35，38，39，40，41，43，208
刘大鉴（公元13世纪后期），35，42，43，208，239
刘益(公元11世纪)，36，37，43，86，114，115，406，414，415
刘道用（公元12世纪），20
刘洪（公元2、3世纪），504
刘铎（公元19世纪），101
刘克让（公元13世纪），153
刘歆，61

刘敏（公元13世纪），152
刘徽(公元3世纪)，114，206，207，213，215，286，292，336，352，449
刘巨源（刘巨渊，公元13世纪），153，154
刘虬江（公元18世纪），465
陆文圭（公元13世纪），203
鲁不鲁乞（Wiliam of Rubruck，公元13世纪），136，137
鲁坤（公元13世纪），292
老子（公元前6世纪），57，59，60
劳伦斯（Lawrence，公元13世纪），136
罗士琳(1774～1853)，41，240，246，250，256，257，258，270，271，276，279

M

马可波罗（Marco Polo，公元13世纪），147
马坚，143
马重绩（公元10世纪），29
马哈亚那（约公元9世纪），3
马哈惹乍帝瓦（约公元9世纪），3
马欢（公元15世纪），502
马杰（公元16世纪），417
玛吉思脱斯（Grigor Magistos,？～1058)，139
麻九畴（1185～1234)，19，23，24
摩雷侃（约公元9世纪），3
毛凤飞（公元17世纪），283
毛鹏翼（公元13世纪），153
毛利重能（公元17世纪），473

梅珏成（1681～1763），97，186，191，192，399，469，472
梅文鼎（1633～1721），170，337
莫若（公元13、14世纪），207，208，210，234
忙哥拉（？～1278），147，149
蒙哥（1208～1259），131，136～140，194
木牙代丁（Moueyed-ud-din Ibn Ourzy，公元13世纪），150
木雅·坚参白桑（公元10世纪），3

N

南秉哲（公元19世纪），98，129
纳皮尔（J. Napier，1550～1617），94
纳速拉丁·途思（Nasir al din al-Tūsi，1201～1280），139，140，141，144，145，150，151
奈只木丁（Nedim-ud-din Kitab，公元13世纪），150
聂珪（公元13世纪），52

O

欧几里得（Euclid，公元前3、4世纪），138，144

P

跛帖木儿（Timur the Lame 或 Timurlane，约公元14世纪），512
普巴·伦珠江措（公元15世纪），6
F·培根（Francis Bacon，1561～1626），286
彭徽（公元12世纪），20
彭泽、彭彦材（公元13世纪前期），36，40～43

Q

钱易（公元 11 世纪），13
钱宝琮（1892～1974），280，303，330，337，412
前田利家（公元 17 世纪），475
齐义（公元 13 世纪），165
齐履谦（1263～1329），49，165，170，199
齐桓公（公元前 7 世纪），333
秦越人（约公元前 4、5 世纪），61
秦九韶（1209？～1261 以后），75，86，94，95，193，211，219，228，319，326，408，449，476，478
穷布·唐波（约公元 9 世纪），3
怯的不花（公元 13 世纪），139

R

任忠杰（公元 12 世纪），19
任世清（公元 13 世纪），153
阮元(1764～1849)，96，97，100，101，330，389
荣棨（公元 12 世纪），210

S

撒立（公元 13），139
三上义夫（1875～1950），280
沈康身，130
沈立（公元 11 世纪），293

沈括(1030～1094)，178，184，187，437，481
沈钦裴（公元19世纪），246，279
沈士桂（公元18世纪），465
申居敬（公元13世纪），153
司马相如（公元前179～公元前122），61
斯蒂文（S. Stevin，1548？～1620），94
邵雍（1011～1077），24，285
释迦牟尼，5
石得之（公元14世纪），282
石信道（公元12世纪），35，40，43，61，208
石抹继祖（公元13世纪），204
松赞干布（公元7世纪），2
宋濂（1310～1381），282，283，284
孙子（公元5世纪），84
孙思邈（581？～682），57
苏正（公元13世纪），148
苏东坡（1036～1101），61
苏天爵（1294～1352），204

T

田坂兴道，144
汤浅得之（公元17世纪），473
铁木耳（公元13、14世纪），195
土华那波（即班智达钦体里，公元8世纪），2，3
秃儿花（公元13世纪），139
托勒密（Claudius Ptolemaeus，85？～165），145

W

王博文（公元13世纪），53
王鹗（公元13世纪），53
王德渊（公元13世纪），56，99，100，101
王恽（1227～1304），45，46
王宽（公元13、14世纪），48
王宾（公元13、14世纪），48
王著（公元13世纪），49
王良（公元13世纪），47
王孝通（公元7世纪），2，36，43，86，87，298，336，412
王仁岫（公元11世纪），13
王振鹤（公元14世纪），504
王恂(1235～1282)，44，47，48，49，96，154～157，165，166，167，169，170，175，176，178，179，183，186，191，193，267，500
王钧（公元16世纪），332
王文素（公元15、16世纪），334，346～356，358，359，360，362，363，366～371，375～380，383，385，386，387，392，395，399，402，480，482，507，511
王仙（公元15世纪），325
王思廉（公元13世纪），292，303
王世桢（公元16世纪），283
王祎（1321～1372），283，284，285
王泽沛（公元19世纪），98
王季同（公元19世纪），98
王国维（1877～1927），422

王相（王晋升，约公元17世纪），465
王世安（公元13世纪），148
王彦实（公元13世纪），153
王亨（公元13世纪），153
王素（公元13世纪），153
王椿（公元13世纪），153
王祐（公元13、14世纪），201
汪景升（时代不好定），469
汪一诚（公元16、17世纪），496
汪一栋（公元16、17世纪），496
完颜·阿古打、完颜旻（1068～1123），13
完颜晟（1075～1135），13，18
完颜珣（1163～1123），22
完颜璟（1168～1208），20
完颜琦（公元12、13世纪），23
完颜守绪（公元13世纪），23
万尾时春（公元18世纪），476
魏璠（公元13世纪），53
魏保华，130
魏征（580～643），53
文成公主（公元7世纪），2
斡直（公元13世纪），292
窝阔台（1186～1241），51，131，135，152
沃尔科夫（A. Volkov），292
武友（公元15世纪），525
乌鲁别克（又作兀鲁别克，Ulūgh Beg，1394～1449），512，513
乌良合台（又作兀良合台，1201～1272），140
吴敬(公元15世纪)，281，330～333，335～339，341，342，346，

388，351，353，359，376，378，392，395，399，402，413，447，455，465，477，482，485，506，511，513，514
吴讷（公元16世纪），331，332
吴继绥（公元16世纪），471，472
吴宗儒（公元16世纪），463
吴兆珍（公元19世纪），466

X

项麟（公元15世纪），330
向达（1900～1966），464
夏原吉（公元14、15世纪），324，325
夏源泽（公元15世纪），349，351，485，486，506，523
谢元作（John Hoe），280
谢察微（公元10世纪），504
解缙（1369～1415），326
解·挪桑江措（约公元？世纪），6
旭烈（？～1252），139，140
旭烈兀（1219～1265），140，150，151
许荣（公元15世纪），351
许衡(1209～1281），48，154，155，156，157，166
许谦（公元14世纪），205
徐心鲁（公元16世纪），334，353，392，393，399，486，507，523
邢云路（公元16、17世纪），169，170，175，186，497，499，500，501，502，511
星野实宣（公元17世纪），479
荀况（公元前313～公元前238），61

熊朋来（公元13世纪），203，204
熊台南（公元16世纪），486
肖𣂏（1231？～1308），195
辛格（A．N．Singh），517
辛引孙（公元15世纪），520
墀德祖甸（约公元7世纪），2

Y

杨湜（约公元14世纪），205
杨级（公元12世纪），18
杨辉(公元13世纪)，37，39，211，219，221，262，326，327，328，332，334，335，336，351，352，354，355，356，360，363，367，368，374，375，397，398，414，437，438，443，523
杨云翼（1170～1228），19，21，22，23
杨炎（727～781），424
杨士奇（1365～1444），327
砚坚（公元13世纪），52，127
燕肃（961～1040），21
严恭(公元14世纪)，316，318，319，326，327，508
严敦杰（1917～1988），25，26，28，29，326，338，464，470，471
颜之推（531～?），386
岳铉（1249～1312），145，153，154
叶耀元（公元19世纪），98
元好问（1190～1257），23，41，51，53，303
元裕（公元12世纪），35，40，41，43，208

亦思马因（公元13世纪），142
亦黑迭儿（公元13世纪），142
伊本·海赛木（Ibn al-Haitham，965～1039），286
伊本·马哈穆德（Salāh al Din Mūsa Ibn Mahmud，公元15世纪），512
郁新（公元14、15世纪），324
余楷（公元16世纪），488，490，508，511
余介石（1901～1968），396
姚广孝（1335～1418），326
姚枢（1203～1280），53
英诺森四世（Innocen IV,? ～1254），136
耶律楚材（1189～1244），17，41，131～134，137
耶律履（1131～1191），19，133
耶律德元（公元12世纪），19
耶律聿鲁（公元12世纪），19
裕宗（真金，公元13世纪），48

Z

张择端（约公元12世纪），503
张行简（? ～1215），19～23
张玮（公元12世纪），19
张易（? ～1282），44，48，49，145，154，155
张文谦（1216～1283），44～47，49，155
张子和（1156? ～1228），24
张衡（78～139），286
张祥（公元13、14世纪），293，303
张敦仁（1754～1834），127

张模（公元14世纪），283
张楚钟（公元19世纪），98
张南薰（公元19世纪），101
张苍（？～公元前152），392
张居正（1535～1582），423
张居寔（公元13世纪），153
张诚（公元13世纪），153
张珪（公元13世纪），153
张仲英（公元13世纪），153
张伯祥（公元13世纪），153
张世英（公元13世纪），153
章濬（公元14世纪），282，283，284
藏穷·曲札江措（公元15世纪），6
藏玉谢（约公元8世纪），3
真金（即裕宗）
甄鸾（公元6世纪），504，505
札马鲁丁（？～1290?），137～143，145
札穷·云旦江措（公元15世纪），6
庄子（公元前369～公元前286），57，59
赵复（公元13世纪），58
赵伯恒（公元13世纪），153
赵桢（公元13世纪），153
赵友钦（公元14世纪），281～287，289～292
赵德新（公元13世纪），153
赵居嵒（公元13世纪），153
赵炳（1221～1279），147，149
赵元镇（公元13、14世纪），206～210，212
赵瑀（公元14世纪），316

赵秉文（1159～1232），23，51
赵知微（公元12世纪），19，152，157，198
郑招（公元15世纪），522
郑钦之（公元15世纪），522
郑君漭（公元15世纪），521
郑麟趾（公元15世纪），521，522
郑和（1371～1435），345，502
郑之蕃（1887～1963），280
周公（公元前11世纪），207
周述学（公元16世纪），331，483，484，485，507，511
周云青，348
周俊（公元11世纪），293
朱世杰（公元13、14世纪），39，43，96，206，211～212，215，216，219，221，223～228，230，233，235，236，237，239～242，244～250，257～262，265，267～270，272～280，308，310，336，437，518，519，523
朱晖（公元14世纪），282，284
朱元璋（1328～1398），324
朱棣（1360～1424），326
朱允炆（1376～1402），326
朱裳（公元15世纪），325
朱瞻基（1399～1435），325
朱载堉（1536～1611），497，498，499，502，508
朱谅（公元13世纪），153
朱熹（1130～1200），57，58，61，386
祝泌（约公元14世纪），282
祖冲之（429～500），156，213，215，286，291，412
祖颐(公元13、14世纪)，35，37，42，208，209，210，212，239